UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

VICTOR PORTO

TENSORES EM FÍSICA: EQUAÇÕES DE MAXWELL EM NOTAÇÃO TENSORIAL

BRASÍLIA

23 DE MAIO DE 2021

Victor Porto

Tensores em Física: Equações de Maxwell em Notação Tensorial

Trabalho Final da disciplina "Física Matemática B", ofertada pelo Instituto de Física da Universidade de Brasília no segundo semestre de 2020.

Professor: Leonardo Luiz e Castro

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

23 de Maio de 2021

Resumo

Esse trabalho se propõe como uma breve revisão e também uma tentativa de apresentar as Equações de Maxwell no Vácuo, a Equação da Continuidade, as Equações de Maxwell na Matéria e as Transformações de Lorentz em notação tensorial, também chamada de formulação covariante. Isto, em unidades do Sistema Internacional (SI) e para a métrica de Minkowski com assinatura $(-,+,+,+)$. A vantagem de se utilizar essa notação é que ela permite que objetos sejam unificados e que equações possam ser escritas de forma mais compacta.

Palavras-chaves: Física Matemática. Eletromagnetismo. Equações de Maxwell. Notação Tensorial.

Sumário

Introdução

Antes de abordar as Equações de Maxwell em notação tensorial, é importante relembrar algumas características dos tensores e apresentar a notação que será utilizada neste trabalho. Para compor os parágrafos a seguir, foram consultados os trabalhos de (EINSTEIN., 1916), (CARROLL, 2004) e (GRIFFITHS, 2012).

Um quadrivetor contravariante A^μ (com $\mu = 0$, 1, 2 e 3), também chamado tensor de orem 1, é um objeto de 4 componentes que se transforma por uma mudança de sistema de coordenadas tal

$$\bar{A}^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu, \tag{1}$$

com $\bar{x}^\mu = (c\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e $x^\mu = (ct, x, y, z)$. Essa regra de transformação também pode ser escrita como uma soma de Einstein (que será utilizada daqui em diante), conforme

$$\bar{A}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu, \tag{2}$$

em que $\Lambda^\mu_\nu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}$ e o índice mudo (que se repete em cima em um objeto e embaixo em outro) representa uma soma.

Um tensor contravariante $A^{\mu\nu}$ de ordem 2 é um objeto de 16 componentes, dado pela multiplicação das componentes de dois quadrivetores B^μ e C^ν, tal

$$A^{\mu\nu} = B^\mu C^\nu. \tag{3}$$

Esse objeto se transforma por uma mudança de sistema de coordenadas tal

$$\bar{A}^{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} A^{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta A^{\alpha\beta}. \tag{4}$$

Para transformar um quadrivetor contravariante A^μ em um covariante A_μ, ou vice-versa, usa-se o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ ou o tensor métrico inverso $g^{\mu\nu}$, tal

$$A_\mu = g_{\mu\alpha} A^\alpha, \tag{5}$$

$$A^\mu = g^{\mu\alpha} A_\alpha. \tag{6}$$

No caso do Eletromagnetismo Clássico, no domínio da Relatividade Restrita/Especial, usa-se o tensor métrico de Minkowski (ou, simplesmente, métrica de Minkowski),

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

aqui, com a assinatura $(-,+,+,+)$. O tensor métrico inverso $g^{\mu\nu}$, por sua vez se relaciona com o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ por

$$g^{\nu\beta}g_{\alpha\beta} = \delta^{\nu}_{\alpha}, \tag{8}$$

em que

$$\delta^{\nu}_{\alpha} = \begin{cases} 1, & \text{para } \nu = \alpha \\ 0, & \text{para } \nu \neq \alpha \end{cases} \tag{9}$$

é o delta de Kronecker, tal que

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Assim, o quadrivetor das coordenadas $x^{\mu} = (ct, x, y, z)$ também pode ser escrito na sua forma covariante $x_{\mu} = g_{\mu\alpha}x^{\alpha} = (-ct, x, y, z)$. O mesmo vale para o quadrivetor das derivadas paciais, dado em sua forma contravariante por $\partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$ e em sua forma covariante por $\partial_{\mu} = g_{\mu\alpha}\partial^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$.

O tensor métrico também pode ser utilizado para transformar um tensor de ordem 2 contravariante $A^{\mu\nu}$ em um covariante[1] $A_{\mu\nu}$, ou vice-versa, tal

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}A^{\sigma\beta}, \tag{11}$$

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\beta\nu}A_{\sigma\beta}. \tag{12}$$

Disso, segue que um tensor de ordem 2 é dito simétrico se

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}, \tag{13}$$

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}, \tag{14}$$

ou antissimétrico se

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}, \tag{15}$$

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}. \tag{16}$$

Preparado o terreno, este trabalho se organiza de forma a apresentar, em notação tensorial (ou formulação covariante): as Equações de Maxwell no Vácuo, no Capítulo 1; a Equação da Continuidade, no Capítulo 2; as Equações de Maxwell na Matéria, no Capítulo 3; e as Transformações de Lorentz, no Capítulo 4.

[1] Um tensor de ordem 2 contravariante é também chamado tensor de ordem (2,0). Já um tensor de ordem 2 covariante é também chamado tensor de ordem (0,2).

Vale ressaltar que as equações que serão apresentadas aqui estão em unidades do Sistema Internacinal (SI). Algumas delas também podem ser encontradas em unidades Gaussianas ou em unidades de Heaviside-Lorentz em (HERAS; BÁEZ, 2008).

1 Equações de Maxwell no Vácuo

Neste Capítulo, as Equações de Maxwell no Vácuo serão apresentas em notação tensorial (ou formulação covariante), de acordo com os trabalhos de (EINSTEIN., 1916), (CARROLL, 2004) e (GRIFFITHS, 2012).

De modo mais convencional, as Equações de Maxwell no Vácuo são um conjunto de quatro equações diferenciais parciais acopladas,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1.1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{1.2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{1.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{1.4}$$

em que $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ é o vetor campo elétrico, $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ é vetor campo magnético, ρ é a densidade de carga elétrica, $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ é o vetor densidade de corrente elétrica, ε_0 é a permissividade elétrica do vácuo e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo. Essas equações também são conhecidas, respectivamente, como Lei de Gauss, Lei de Gauss para o magnetismo, Lei de Faraday e Lei de Ampère-Maxwell.

Em notação tensorial as eqs. (1.1 - 1.4) se resumem a apenas duas expressões,

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu, \tag{1.5}$$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0, \tag{1.6}$$

em que

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

é o tensor eletromagnético em sua forma contravariante,

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\nu}F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

é o tensor eletromagnético em sua forma covariante[1],

$$J^{\mu} = (c\rho, J_x, J_y, J_z) \tag{1.9}$$

é o quadrivetor densidade de corrente elétrica e c é a velocidade da luz no vácuo.

Pode-se, então, checar se as eqs. (1.5 - 1.6) são equivalentes às eqs. (1.1 - 1.4).

Para $\mu = 0$ na eq. (1.5), tem-se, do lado esquerdo,

$$\begin{aligned} \partial_{\nu} F^{0\nu} &= \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{01} + \partial_2 F^{02} + \partial_3 F^{03} \\ &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \\ &= \frac{1}{c}\vec{\nabla}.\vec{E}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

e, do lado direito,

$$\mu_0 J^0 = \mu_0 c\rho, \tag{1.11}$$

ou seja, tem-se a Lei de Gauss (eq. (1.1)), uma vez que

$$c^2\epsilon_0\mu_0 = 1. \tag{1.12}$$

Para $\mu = 1$ na eq. (1.5), tem-se

$$\begin{aligned} \partial_{\nu} F^{1\nu} &= \partial_0 F^{10} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} \\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \left(\frac{B_z}{\partial y} - \frac{B_y}{\partial z}\right) = \mu_0 J_x, \end{aligned} \tag{1.13}$$

para $\mu = 2$ na eq. (1.5),

$$\begin{aligned} \partial_{\nu} F^{2\nu} &= \partial_0 F^{20} + \partial_1 F^{21} + \partial_2 F^{22} + \partial_3 F^{23} \\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \left(\frac{B_x}{\partial z} - \frac{B_z}{\partial x}\right) = \mu_0 J_y, \end{aligned} \tag{1.14}$$

e para $\mu = 3$ na eq. (1.5),

$$\begin{aligned} \partial_{\nu} F^{3\nu} &= \partial_0 F^{30} + \partial_1 F^{31} + \partial_2 F^{32} + \partial_3 F^{33} \\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \left(\frac{B_y}{\partial x} - \frac{B_x}{\partial y}\right) = \mu_0 J_z, \end{aligned} \tag{1.15}$$

de tal forma que ao somar as eqs. (1.13 - 1.15) tem-se a Lei de Ampère-Maxwell (eq.(1.4)).

A eq. (1.6) também é um conjunto de 4 equações,

$$\partial_2 F_{01} + \partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} = 0, \tag{1.16}$$

$$\partial_3 F_{02} + \partial_0 F_{23} + \partial_2 F_{30} = 0, \tag{1.17}$$

[1] Note que o tensor eletromagnético é antissimétrico, i.e. $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ e $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$.

$$\partial_3 F_{01} + \partial_0 F_{13} + \partial_1 F_{30} = 0, \tag{1.18}$$

$$\partial_3 F_{12} + \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} = 0, \tag{1.19}$$

ou ainda,

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \tag{1.20}$$

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \tag{1.21}$$

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \tag{1.23}$$

de modo que ao combinar as eqs. (1.20 - 1.22) tem-se a Lei de Faraday (eq.(1.3)) e a eq. (1.23) é a Lei de Gauss para o magnetismo (eq. (1.2)).

Uma vez que os vetores campo elétrico e campo magnético podem ser escritos em termos do potencial escalar V e do potencial vetor $\vec{A} = (A_x, A_y, A_Z)$, tal

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{1.24}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \tag{1.25}$$

o tensor eletromagnético também pode ser escrito em termos do potencial quadrivetor

$$A^\mu = (V/c, A_x, A_y, A_z), \tag{1.26}$$

tal

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \tag{1.27}$$

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\nu}F^{\alpha\beta} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{1.28}$$

Dessa forma, a eq. (1.5) pode ser reescrita

$$\partial^\mu \partial_\nu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \mu_0 J^\mu \tag{1.29}$$

e a eq. (1.6) é identicamente nula,

$$\partial_\lambda \partial_\mu A_\nu - \partial_\lambda \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu \partial_\nu A_\lambda - \partial_\mu \partial_\lambda A_\nu + \partial_\nu \partial_\lambda A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu A_\lambda = 0, \tag{1.30}$$

uma vez que as derivadas parciais comutam.

Entretanto, vale lembrar que os pontencias V e $\vec{A}$ não são unicamente determinados pelos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Note que a transformação

$$\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda \\ V &\rightarrow V - \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1.31}$$

que também pode ser escrita

$$A^{\nu} \rightarrow A^{\nu} + \partial^{\nu}\lambda, \tag{1.32}$$

em que λ é uma função escalar, não altera $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $F^{\mu\nu}$.

A escolha da função λ tal que $\partial_{\nu}\partial^{\nu}\lambda = 0$ é o que se chama calibre de Lorenz, que também se traduz em

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{A} = 0, \tag{1.33}$$

que em notação tensorial é

$$\partial_{\nu}A^{\nu} = 0. \tag{1.34}$$

Essa escolha do calibre de Lorenz pode ser utilizada para simplificar a eq.(1.29), tal

$$\Box^2 A^{\mu} = -\mu_0 J^{\mu} \tag{1.35}$$

em que

$$\Box^2 = \partial_{\nu}\partial^{\nu} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{1.36}$$

é o denominado operador d'Alembertiano.

Essa eq. (1.35) é uma forma bastante compacta de se escrever as Equações de Maxwell (eqs. (1.1 - 1.4)).

2 Equação da Continuidade

Neste capítulo, a Equação da Continuidade será apresentada conforme o que está exposto em (GRIFFITHS, 2012). Em sua forma mais convecional, ela é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J} = 0. \tag{2.1}$$

Note que ela expressa basicamente a conservação da carga elétrica localmente.

Em notação tensorial, essa equação admite uma forma mais compacta, tal

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \tag{2.2}$$

em que J^μ é o quadrivetor densidade de corrente elétrica, dado pela eq. (1.9), já que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{1}{c}\frac{\partial J_0}{\partial t} \\ &= \partial_0 J^0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

e

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}.\vec{J} &= \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_y}{\partial y} \\ &= \partial_i J^i, \end{aligned} \tag{2.4}$$

em que i corre de 1 a 3.

Vale ressaltar que ela pode ser obtida diretamente a partir das Equações de Maxwell. Ao se tomar a derivada parcial ∂_μ da eq. (1.5), tem-se

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 \partial_\mu J^\mu, \tag{2.5}$$

cujo lado esquerdo é nulo, uma vez que o tensor eletromagnético é antissimétrico e as derivadas parciais comutam, i.e.

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} &= \partial_\nu \partial_\mu F^{\nu\mu} \\ &= -\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} \\ &= -\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

3 Equações de Maxwell na Matéria

Neste Capítulo, as Equações de Maxwell na Matéria serão apresentadas em notação tensorial. Para tal, foram consultados principalmente os trabalhos de (ERINGEN; MAUGIN, 1990), (VANDERLINDE, 2004) e (PAUL; RAHM, 2012).

De forma mais convencional, as Equações de Maxwell na Matéria são um conjunto de quatro equações diferenciais parciais acopladas,

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho_f, \tag{3.1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{3.2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{3.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{3.4}$$

em que $\vec{D} = (D_x, D_y, D_z)$ é o vetor campo de deslocamento elétrico, $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$ é vetor campo magnético auxiliar, ρ_f é a densidade de carga elétrica livre, $\vec{J}_f = (J_{fx}, J_{fy}, J_{fz})$ é o vetor densidade de corrente elétrica livre. Vale lembrar que ρ_f se relaciona com a densidade (total) de carga elétrica ρ e com a densidade de carga elétrica ligada ρ_b por

$$\rho = \rho_f + \rho_b \tag{3.5}$$

e $\vec{J}_f$ se relaciona com o vetor densidade (total) de corrente elétrica $\vec{J}$ e com o vetor densidade de corrente elétrica ligada $\vec{J}_b$ por

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b. \tag{3.6}$$

Em notação tensorial as eqs. (3.1 - 3.4) se resumem a duas expressões,

$$\partial_\nu D^{\mu\nu} = J_f^\mu, \tag{3.7}$$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0, \tag{3.8}$$

em que

$$D^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & cD_x & cD_y & cD_z \\ -cD_x & 0 & H_z & -H_y \\ -cD_y & -H_z & 0 & H_x \\ -cD_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

é o tensor de deslocamento eletromagnético e $J_f^\mu = (c\rho_f, \vec{J}_f)$ é o quadrivetor densidade de corrente elétrica livre, que se relaciona com o quadrivetor densidade de corrente elétrica ligada $J_b^\mu = (c\rho_b, \vec{J}_b)$ e com o quadrivetor densidade de corrente elétrica J^μ (eq. (1.9)) por

$$J^\mu = J_f^\mu + J_b^\mu. \tag{3.10}$$

O vetor campo de deslocamento elétrico $\vec{D}$ pode ser escrito em termos do vetor campo elétrico $\vec{E}$ e do vetor polarização $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$, tal

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \tag{3.11}$$

e o vetor campo magnético auxiliar $\vec{H}$ em termos do vetor campo magnético $\vec{B}$ e do vetor magnetização $\vec{M} = (M_x, M_y, M_z)$, tal

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}, \tag{3.12}$$

uma vez que ρ_b e $\vec{J}_b$ podem ser escritos

$$\rho_b = -\vec{\nabla}.\vec{P}, \tag{3.13}$$

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}. \tag{3.14}$$

Em notação tensorial, as eqs. (3.11) e (3.12) se resumem a apenas uma equação,

$$D^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}F^{\mu\nu} + P^{\mu\nu}, \tag{3.15}$$

em que

$$P^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & cP_x & cP_y & cP_z \\ -cP_x & 0 & -M_z & M_y \\ -cP_y & M_z & 0 & -M_x \\ -cP_z & -M_y & M_x & 0 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

é o tensor polarização-magnetização.

Assim, da mesma forma que os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ podem ser unificados em um objeto denominado tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$ (eq. (1.7)), os campos $\vec{D}$ e $\vec{H}$ podem ser unificados no tensor de deslocamento eletromagnético $D^{\mu\nu}$ (eq. (3.9)) e os vetores $\vec{P}$ e $\vec{M}$ no tensor polarização-magnetização $P^{\mu\nu}$ (eq. (3.16)).

4 Transformações de Lorentz

Neste capítulo, as transformações de Lorentz para as coordenadas (ct, x, y, z), para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ e para os vetores $\vec{P}$ e $\vec{M}$ serão apresentadas. As principais fontes consultadas foram os trabalhos de (JACKSON, 1999), (VANDERLINDE, 2004) e (GRIFFITHS, 2012).

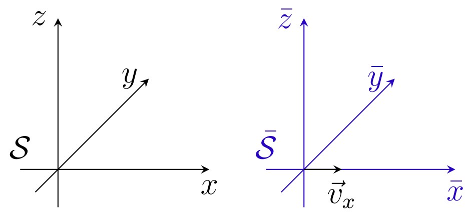

Figura 1 – Representação de um referencial inercial $\mathcal{S}$ e um referencial inercial $\bar{\mathcal{S}}$ que se move com uma velocidade $\vec{v}_x = (v_x, 0, 0)$ em relação a $\mathcal{S}$. Imagem gerada com ferramentas disponíveis no pacote TikZ (TANTAU, 2020).

Pode-se considerar, primeiro, as transformações de Lorentz para um caso mais simples, de um referencial inercial $\bar{\mathcal{S}}$ que se move com uma velocidade $\vec{v}_x = (v_x, 0, 0)$ em relação a um referencial inercial $\mathcal{S}$, tal como esquematizado na Figura 1. As coordenadas $(c\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de $\bar{\mathcal{S}}$ se relacionam com as coordenadas (ct, x, y, z) de $\mathcal{S}$ por

$$\begin{aligned} c\bar{t} &= \gamma(ct - \beta_1 x) \\ \bar{x} &= \gamma(x - \beta_1 ct) \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z, \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.2}$$

é o fator de contração de Lorentz, com $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, e

$$\beta_1 = \frac{v_x}{c}. \tag{4.3}$$

Em notação tensorial, as transformações de Lorentz entre as coordenadas dos dois referenciais podem ser escritas de forma mais compacta, tal

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \tag{4.4}$$

em que Λ^μ_ν são os elementos da matriz de transformação.

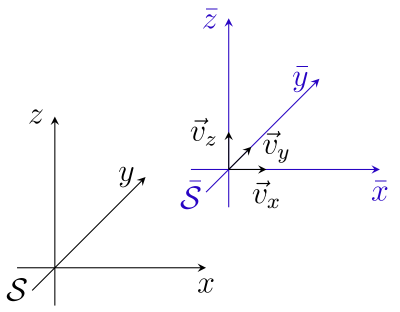

Figura 2 – Representação de um referencial inercial $\mathcal{S}$ e um referencial inercial $\bar{\mathcal{S}}$ que se move com uma velocidade $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = (v_x, v_y, v_z)$ em relação a $\mathcal{S}$. Imagem gerada com ferramentas disponíveis no pacote TikZ (TANTAU, 2020).

Para o caso da eq. (4.1), a matriz de transformação é dada por

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta_1 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Para os casos em que $\bar{\mathcal{S}}$ se move com uma velocidade $\vec{v}_y = (0, v_y, 0)$ ou com uma velocidade $\vec{v}_z = (0, 0, v_z)$ em relação a $\mathcal{S}$, tem-se, respectivamente,

$$\Lambda_y = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta_2 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

$$\Lambda_z = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta_3 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

em que $\beta_2 = \frac{v_y}{c}$ e $\beta_3 = \frac{v_z}{c}$.

Para um caso mais geral que esses apresentados, em que $\bar{\mathcal{S}}$ se move com uma velocidade $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = (v_x, v_y, v_z)$ em relação a $\mathcal{S}$, tal Figura 2, tem-se

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + \frac{\beta_1^2}{\beta^2}(\gamma - 1) & \frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2}(\gamma - 1) & \frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2}(\gamma - 1) \\ -\gamma\beta_2 & \frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{\beta_2^2}{\beta^2}(\gamma - 1) & \frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2}(\gamma - 1) \\ -\gamma\beta_3 & \frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2}(\gamma - 1) & \frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{\beta_3^2}{\beta^2}(\gamma - 1) \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Note que essa matriz não representa a transformação mais geral possível, uma vez que não está sendo levado em conta nenhuma rotação entre $\bar{\mathcal{S}}$ e $\mathcal{S}$. As matrizes de transformação para casos em que há rotações envolvidas podem ser consultadas em (JACKSON, 1999).

Segue da transformação de coordenadas que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ também se transformam. Para um referencial inercial $\bar{\mathcal{S}}$ que se move com uma velocidade $\vec{v}_x = (v_x, 0, 0)$ em relação a um referencial inercial $\mathcal{S}$ (no qual a carga que gera os campos não deve estar em repouso, para que $\vec{B}$ não seja nulo), conforme Figura 1, as leis de transformação para os campos são

$$\begin{aligned} \bar{E}_x &= E_x \\ \bar{E}_y &= \gamma(E_y - v_x B_z) \\ \bar{E}_z &= \gamma(E_z + v_x B_y), \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_x &= B_x \\ \bar{B}_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v_x}{c^2}E_z\right) \\ \bar{B}_z &= \gamma\left(B_z - \frac{v_x}{c^2}E_y\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Em notação tensorial, as transformações dos campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ se resumem a regra de transformação do tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$, que por ser um tensor de ordem 2 obedece

$$\bar{F}^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\sigma F^{\lambda\sigma}. \tag{4.11}$$

Pode-se checar utilizando a matriz da eq. (4.5) para $\mu\nu = 01$, por exemplo,

$$\begin{aligned} \bar{F}^{01} &= \Lambda^0_\lambda \Lambda^1_\sigma F^{\lambda\sigma} \\ &= \Lambda^0_0 \Lambda^1_\sigma F^{0\sigma} + \Lambda^0_1 \Lambda^1_\sigma F^{1\sigma} \\ &= \Lambda^1_\sigma (\Lambda^0_0 F^{0\sigma} + \Lambda^0_1 F^{1\sigma}) \\ &= \Lambda^1_0 (\Lambda^0_0 F^{00} + \Lambda^0_1 F^{10}) + \Lambda^1_1 (\Lambda^0_0 F^{01} + \Lambda^0_1 F^{11}) \\ &= -\gamma\beta_1 \left(\gamma\beta_1 \frac{E_x}{c}\right) + \gamma\left(\gamma\frac{E_x}{c}\right) \\ &= \gamma^2(1 - \beta_1^2)\frac{E_x}{c} \\ &= \frac{E_x}{c}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

tal que $\bar{E}_x = E_x$ (primeira linha da eq. (4.9)). Para os outros pares de índices, tem-se as regras de transformação das demais componentes (tanto da eq. (4.9), quanto da eq. (4.10)).

Não somentes os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ se transformam, mas também os vetores $\vec{P}$ e $\vec{M}$. Para o mesmo caso das eqs. (4.9) e (4.10), tem-se as regras de transformação

$$\begin{aligned} \bar{P}_x &= P_x \\ \bar{P}_y &= \gamma\left(P_y + \frac{v_x}{c^2}M_z\right) \\ \bar{P}_z &= \gamma\left(P_z - \frac{v_x}{c^2}M_y\right). \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_x &= M_x \\
\bar{M}_y &= \gamma(M_y - v_x P_z) \\
\bar{M}_z &= \gamma(M_z + v_x P_y),
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Em notação tensorial, as transformações dos vetores polarização $\vec{P}$ e magnetização $\vec{M}$ se resumem a regra de transformação do tensor polarização-magnetização $P^{\mu\nu}$, que por ser um tensor de ordem 2 satisfaz

$$\bar{P}^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\lambda}\Lambda^{\nu}_{\sigma}P^{\lambda\sigma}. \tag{4.15}$$

Pode-se checar utilizando a matriz da eq. (4.5) para $\mu\nu = 02$, por exemplo,

$$\begin{aligned}
\bar{P}^{02} &= \Lambda^{0}_{\lambda}\Lambda^{2}_{\sigma}P^{\lambda\sigma} \\
&= \Lambda^{0}_{\lambda}\Lambda^{2}_{2}P^{\lambda 2} \\
&= \Lambda^{0}_{0}\Lambda^{2}_{2}P^{02} + \Lambda^{0}_{1}\Lambda^{2}_{2}P^{12} \\
&= \gamma(cP_y) - \gamma\beta_1(-M_z) \\
&= \gamma\left(cP_y + \frac{v_x}{c}M_z\right)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

tal que $\bar{P}_y = \gamma(P_y + \frac{v_x}{c^2}M_z)$ (segunda linha da eq. (4.13)). Para os outros pares de índices, tem-se as regras de transformação das demais componentes (tanto da eq. (4.13), quanto da eq. (4.14)).

Dessa forma, tanto a transformação de (ct, x, y, z) quanto as transformações de $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{P}$ e $\vec{M}$ podem ser escritas de uma forma mais compacta[1], que basicamente se resume às regras de transformação de quadrivetores - para o caso da transforação das coordenadas - e de tensores de ordem 2 - para os demais casos.

[1] Não somente compacta, mas até mais geral, dadas as possibilidades de escolha da matriz de transformação.

Conclusão

Neste trabalho, foram apresentadas em notação tensorial - ou formulação covariante - as Equações de Maxwell no Vácuo, a Equação da Continuidade, as Equações de Maxwell na Matéria e as Transformações de Lorentz.

Ao reescrever os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ como um único objeto, denominado tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$ (eq. (1.7)), as quatro Equações de Maxwell no Vácuo (eqs. (1.1) - (1.4)) puderam ser escritas por apenas duas equações (eqs. (1.5) - (1.6)), ou ainda, até mesmo por apenas uma equação (eq. (1.35)), utilizando o calibre de Lorenz (eq. (1.34)). Essa notação também permitiu que a Equação da Continuidade (eq. (2.1)) fosse escrita de forma mais compacta (ver eq. (2.2)), que pode ser facilmente derivada das Equações de Maxwell no Vácuo.

De forma similar, as quatro Equações de Maxwell na Matéria (eqs. (3.1) - (3.4)) também puderam ser escritas por apenas duas equações (eqs. (3.7) - (3.8)), dadas as unificações do campo de deslocamento elétrico $\vec{D}$ e do campo magnético auxiliar $\vec{H}$ no tensor de deslocamento eletromagnético $D^{\mu\nu}$ (eq. (3.9)) e do vetor polarização $\vec{P}$ e magnetização $\vec{M}$ no tensor polarização-magnetização $P^{\mu\nu}$ (eq. (3.16)).

Por fim, a notação tensorial também possibilitou que as transformações de Lorentz das coordenadas (ct, x, y, z) e as transformações de $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{P}$ e $\vec{M}$ pudessem ser escritas de forma mais compacta - e até mais geral - pelas transformações do quadrivetor das coordenas x^μ e dos tensores $F^{\mu\nu}$ e $P^{\mu\nu}$, tal como apresentado nas eqs. (4.4), (4.11) e (4.15), de acordo com as eqs. (2) e (4).

Referências

CARROLL, S. Spacetime and geometry: An introduction to general relativity. In: ______. [S.l.]: Addison Wesley, 2004. cap. 1. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 7.

EINSTEIN., A. *The Foundation of the Generalised Theory of Relativity*. 1916. [Traduzido por Satyendra Nath Bose]. Disponível em: <https://en.wikisource.org/w/index.php?title=The_Foundation_of_the_Generalised_Theory_of_Relativity&oldid=10777211>. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 7.

ERINGEN, A. C.; MAUGIN, G. A. Electrodynamics of continua ii: Fluids and complex media. In: ______. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1990. cap. 15. Citado na página 12.

GRIFFITHS, D. J. Introduction to electrodynamics. In: ______. 4. ed. [S.l.]: Pearson, 2012. cap. 7, 12. Citado 4 vezes nas páginas 4, 7, 11 e 14.

HERAS, J. A.; BÁEZ, G. The covariant formulation of maxwell's equations expressed in a form independent of specific units. *European Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 30, n. 1, p. 23–33, 2008. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/30/1/003>. Citado na página 6.

JACKSON, J. D. Classical electrodynamics. In: ______. 3. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999. cap. 11. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

PAUL, O.; RAHM, M. Covariant description of transformation optics in nonlinear media. *Optics Express*, OSA, v. 20, n. 8, p. 8982–8997, 2012. Disponível em: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-20-8-8982>. Citado na página 12.

TANTAU, T. *The TikZ and PGF Packages*: Manual for version 3.1.8b. [S.l.], 2020. Disponível em: <https://www.ctan.org/pkg/pgf>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

VANDERLINDE, J. Classical electromagnetic theory. In: ______. [S.l.]: Springer, 2004. cap. 11. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 14.