

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

VICTOR PORTO GONTIJO DE LIMA

**LENTEAMENTO GRAVITACIONAL FRACO E PERFIS  
DE DENSIDADE DE MATÉRIA DE AGLOMERADOS  
DE GALÁXIAS**

BRASÍLIA  
13 DE MAIO DE 2021



Victor Porto Gontijo de Lima

# **Lenteamento Gravitacional Fraco e Perfis de Densidade de Matéria de Aglomerados de Galáxias**

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientadora: Mariana Penna Lima Vitenti

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

13 de Maio de 2021

---

Victor Porto Gontijo de Lima

Lenteamento Gravitacional Fraco e Perfis de Densidade de Matéria de Aglomerados de Galáxias/ Victor Porto Gontijo de Lima. – Brasília, 13 de Maio de 2021.

109 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientadora: Mariana Penna Lima Vitenti

Monografia – Universidade de Brasília – UnB  
Instituto de Física, 13 de Maio de 2021.

1. Cosmologia. 2. Aglomerados de Galáxias. 3. Halos de Matéria Escura.  
4. Perfis de Densidade. 5. Lenteamento Gravitacional Fraco. I. Orientadora:  
Mariana Penna Lima Vitenti. II. Universidade de Brasília. III. Instituto de  
Física. IV. Lenteamento Gravitacional Fraco e Perfis de Densidade de Matéria de  
Aglomerados de Galáxias

---

Victor Porto Gontijo de Lima

# **Lenteamento Gravitacional Fraco e Perfis de Densidade de Matéria de Aglomerados de Galáxias**

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 13 de Maio de 2021:

---

**Mariana Penna Lima Vitenti**  
Orientadora

---

**Cristina Furlanetto**  
Convidado 1

---

**Ricardo Lourenço Correia Ogando**  
Convidado 2

Brasília  
13 de Maio de 2021



*Dedico este trabalho...*

*à todos [e todas] que amo e que me amam;*

*à todos que já me ensinaram algo,  
em especial aos que já partiram desta vida;*

*à todos que lutam em prol da educação gratuita, pública  
e de qualidade (para a autonomia, diversidade e emancipação);*

*à todos que almejam o fim de todas as opressões  
(de gênero, cor, sexualidade, classe etc);*

*à todos que entendem a urgência da crise ecológica;*

*à todos que defendem o direito e acesso à saúde para todos;*

*à todos os profissionais que atuam e que já atuaram  
na linha de frente durante a pandemia do coronavírus;*

*à todos os trabalhadores do mundo inteiro.*



# Agradecimentos

Tenho muitas pessoas para agradecer, tentarei ser o mais breve possível. :)

Gostaria de agradecer, primeiramente, à minha orientadora Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Mariana Penna Lima Vitenti por esses dois anos - um de IC e outro de TCC - de muitos e-mails, mensagens, reuniões, conversas. Não tenho palavras para agradecer todo o carinho e todos os ensinamentos.

Agradeço também à banca, formada pela Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Cristina Furlanetto e pelo Prof. Dr. Ricardo Ogando, por terem aceitado o convite e por todas as sugestões e correções propostas nas apresentações do projeto e do trabalho final.

Agradeço, ainda, a todos os professores [e todas as professoras] que de alguma forma me marcaram positivamente durante a graduação. Em especial, gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Ivan Soares Ferreira, meu primeiro professor de Astronomia e Astrofísica, que infelizmente faleceu ano passado.

Em maior escala, agradeço ao Instituto de Física e à Universidade de Brasília pelas experiências que tive nesses últimos anos e pela formação que me foi proporcionada.

Gostaria de agradecer também à Prof<sup>a</sup>. Simone Aparecida Soares e ao Prof. Me. Eder Dias da Silva, meus primeiros professores de Física, no Ensino Fundamental e Médio.

Agradeço aos meus amigos da minha cidade natal - Arthur B., Arthur W., Clarisse, Gustavo, Mariana, Matheus, Murilo, Natália etc - por todos os papos e todo o companheirismo ao longo de todos esses anos. Sem vocês o caminho seria bem mais difícil.

Agradeço aos meus amigos de República - Marília, Mateus, Sofia e Wertton - por todos os papos quebrados e por todos os jantares comemorativos e noites de jogos. Morar com vocês é muito divertido.

Agradeço aos meus amigos e colegas de Física na UnB - Alice, Amanda, Ana, Caio, Gabriel, Graciele, Isabella, João A., João P., João V., Lorena, Luigi, Mariana, Rafael, Vítor, Vinicius, entre outros - pelos momentos, angústias e sonhos compartilhados.

Agradeço a alguns amigos que não moram perto - Alfredo, Ana, Rhandolff, mas que também são especiais para mim.

Agradeço ao Daniel pela revisão do meu inglês no *Abstract*.

Agradeço aos meus tios, tias, primos e primas que me ajudaram nas mais diversas situações que precisei. Ressalto aqui Livia e Júlia, que sempre estiveram mais próximas.

Agradeço à minha mãe, à minha vó Maria e à minha irmã, por confiarem em mim, muitas vezes mais do que eu mesmo, e por sempre cuidarem de mim. Agradeço à minha

vó Eva, por toda a ternura. Agradeço ao meu pai, que sempre foi um amigão, mas que infelizmente já faleceu, há quase 4 anos. Agradeço ao meus avôs, que também já faleceram. Amo muito todos vocês!

Por fim, gostaria de agradecer também a você, que está lendo este trabalho.

*"Foi reinventando-se a si mesmo, experimentando ou sofrendo a tensa relação entre o que herda e o que recebe ou adquire do contexto social que cria e que o recria, que o ser humano veio se tornando este ser que, para ser, tem de estar sendo. Este ser histórico e cultural que não pode ser explicado somente pela biologia ou pela genética nem tampouco apenas pela cultura. Que não pode ser explicado somente por sua consciência como se esta em lugar de ter-se constituído socialmente e transformado seu corpo em um corpo consciente tivesse sido a criadora todo-poderosa do mundo que o cerca, nem tampouco pode ser explicado como puro resultado das transformações que se operaram neste mundo. Este ser que vive, em si mesmo, a dialética entre o social, sem o que não poderia ser e o individual, sem o que se dissolveria no puro social, sem marca e sem perfil."*

**(Paulo Freire, Política e Educação)**



# Resumo

A determinação das massas dos aglomerados de galáxias é fundamental para que se possa utilizar esses objetos como sonda cosmológica. Infelizmente, não é possível medir a massa total de um aglomerado diretamente. A distribuição projetada de massa pode ser obtida a partir do sinal do lenteamento fraco, por exemplo, tomado a partir de uma análise estatística das pequenas e coerentes distorções nas formas das galáxias ao fundo do aglomerado. No entanto, apesar de não depender de considerações sobre o estado dinâmico e termodinâmico do aglomerado, essa distribuição de massa obtida pelo sinal do lenteamento fraco não está isenta de efeitos sistemáticos, como *miscentering*, triaxialidade e projeção, contaminação de sinais, entre outros. Por isso, simulações computacionais têm sido utilizadas para aprimorar a reconstrução de massa. Nas últimas décadas, diferentes simulações de N-corpos do colapso gravitacional da matéria escura foram realizadas buscando por um perfil de densidade de matéria universal para os halos de matéria escura, principais constituintes dos aglomerados. Como resultado, diferentes perfis existentes na literatura, como os modelos Hernquist, Navarro-Frenk-White, Einasto e Diemer-Kravtsov, apresentaram-se como bons candidatos, em diferentes simulações, para descrever a distribuição de matéria de halos de matéria escura. Neste trabalho, apresentamos uma breve revisão do Modelo Padrão da Cosmologia Moderna, da descrição e formação da estrutura em grande escala, dos perfis de densidade de matéria dos halos de matéria escura, do lenteamento gravitacional fraco devido a aglomerados de galáxias, entre outros tópicos relacionados. Apresentamos também um código desenvolvido em Python, em que implementamos o perfil de densidade tridimensional, sua derivada logarítmica, e um conjunto de outras funções que dependem do perfil, como a densidade superficial de massa, a densidade superficial de massa média e o excesso de densidade superficial de massa. Isto, para variadas modelagens, considerando inclusive os termos de densidade média de matéria e de 2-halo para o perfil externo. Validamos o nosso código comparando seus resultados com os obtidos com o pacote Colossus (DIEMER, 2018).

**Palavras-chaves:** Cosmologia. Aglomerados de Galáxias. Halos de Matéria Escura. Perfis de Densidade. Lenteamento Gravitacional Fraco.



# Abstract

Determining galaxy cluster masses is fundamental for using them as cosmological probes. Unfortunately, their masses are not directly measurable. Their projected mass distribution can be obtained by the gravitational weak lensing signal, for example, taken by a statistical analysis of small yet coherent distortions on the shape of the galaxies behind the cluster. However, despite not depending on considerations about the cluster dynamic and thermodynamic states, the mass distribution obtained with the weak lensing signal isn't exempt of systematic effects like miscentering, triaxiality and projection, signal contamination etc. Because of that, computational simulations have been used to improve mass reconstruction. In the last decades, different N-body simulations for gravitational collapse of cold dark matter (CDM) were performed searching for a universal density profile of dark matter halos, the main constituent of galaxy clusters. As a result, different dark matter halo profiles available in the literature, such as the Hernquist, Navarro-Frenk-White, Einasto and Diemer-Kravtsov models, showed themselves as good candidates, in different simulations, to describe the matter distributions of dark matter halos. In this work, we present a brief review on the Cosmological Standard Model, on the description and formation of the Large Scale Structure (LSS), on the density profiles of dark matter halos, on weak gravitational lensing due to galaxy clusters and on other related topics. We also present a code written in Python, in which we implement the three-dimensional radial density profile, its logarithmic slope, and other physical quantities which depend on the density profile, e.g. the surface mass density, the mean surface mass density and the excess surface mass density. This, for various models, considering even the mean density and 2-halo terms for the outer profile. We compared our code results with the ones obtained using the Colossus package ([DIEMER, 2018](#)) to check for precision and agreement.

**Key-words:** Cosmology. Galaxy Clusters. Dark Matter Halos. Density Profiles. Gravitational Weak Lensing.



# Lista de ilustrações

- Figura 1 – Aglomerado de Galáxias CL2244-02, situado em *redshift*  $z = 0,3$ . Junto a ele, é possível notar um arco resultante do lenteamento gravitacional forte de uma galáxia em *redshift*  $z = 2,24$ . Imagem da esquerda retirada de (LYNDS; PETROSIAN, 1989) e imagem da direita retirada de (ESO, 1998). . . . . 22
- Figura 2 – Aglomerado de Galáxias Abell 1689, situado em *redshift*  $z = 0,18$ . Imagem da esquerda retirada de (TYSON; VALDES; WENK, 1990) e imagem da direita retirada de (HUBBLE/ESA, 2013). . . . . 23
- Figura 3 – Espectro de potência linear atual  $P(k, z = 0)$ . Os dados, com as respectivas barras de erro, são um compilado de diferentes medições, tanto de anisotropias da radiação cósmica de fundo quanto da distribuição em grande escala de galáxias, abundância de aglomerados, distorções na forma de galáxias (sinal do lenteamento fraco) e floresta Ly- $\alpha$ . Sobreposto aos dados, tem-se a curva contínua dada pelo modelo teórico de um universo com  $\Omega_{\kappa,0} = 0$ ,  $\Omega_{m,0} = 0,28$ ,  $\Omega_{b,0}/\Omega_{m,0} = 0,16$ ,  $h = 0,72$ . Imagem retirada de (TEGMARK et al., 2004). . . . . 38
- Figura 4 – Função janela do tipo cartola (*top-hat*) no espaço real (à esquerda) e no espaço de Fourier (à direita). Gráficos gerados com auxílio de ferramentas disponíveis nos pacotes NumPy (HARRIS et al., 2020) e matplotlib (HUNTER, 2007). . . . . 40
- Figura 5 – Evolução de uma perturbação esférica *top-hat* em um universo Einstein-de Sitter ( $\Omega_m = 1$ ). Para  $E < 0$  (ver eq. 2.18) a perturbação esférica atinge um raio máximo  $R_{ta}$  em um certo instante  $t_{ta}$ , depois colapsa e sofre virialização. A virialização ocorre quando  $R = \frac{1}{2}R_{ta}$ . Imagem adaptada de (NORMAN, 2005). . . . . 43
- Figura 6 – Densidade projetada de um halo de massa  $M_{vir} = 1,1 \times 10^{14} M_{\odot} h^{-1}$  e baixa taxa de acreção  $\Gamma = 0.8$  (ver subseção 4.1.4) em *redshift*  $z = 0$  para uma cosmologia com  $\Omega_m = 1 - \Omega_{\Lambda} = 0,27$  (ver eq. (2.37)). Os círculos concêntricos em branco indicam os raios  $r_{vir}$  (curva sólida),  $r_{200m}$  (curva ponto-tracejada) e  $r_{splashback}$  (curva tracejada). Imagem adaptada de (MORE; DIEMER; KRAVTSOV, 2015). . . . . 49

Figura 7 – Diagrama do espaço de fase (à esquerda) para halos resultantes de colapso esférico (curvas em preto) e de colapso com elipticidade $e = 0.05$ (mapa de cores) e perfis de densidade (à direita) para halos de diferentes elipticidades iniciais com taxa de acreção instantânea $s = d\log(M)/d\log(a) = 3$ . A linha vertical no gráfico dos perfis de densidade indica o raio <i>splashback</i> previsto pelo modelo de colapso esférico para essa taxa de acreção instantânea. Como é possível notar, a localização do raio <i>splashback</i> não parece depender da elipticidade inicial. Imagem retirada de (ADHIKARI; DALAL; CHAMBERLAIN, 2014). . . . .	50
Figura 8 – Diagrama do espaço de fase (à esquerda) e derivadas logarítmicas do perfil de densidade (à direita) para uma coleção de halos de massa $M_{vir} = 1 \sim 4 \times 10^{14} M_{\odot} h^{-1}$ identificados na Simulação MultiDark. No diagrama, a barra de cor mostra o número (médio) de partículas em cada pixel do espaço de fase. No gráfico das derivadas logarítmicas, a curva em vermelho é dada por todas as partículas, enquanto a curva em azul é dada somente pelas partículas com $ v_r  < 0, 4v_c$ . A linha vertical indica o raio <i>splashback</i> . Imagem retirada de (ADHIKARI; DALAL; CHAMBERLAIN, 2014). . . . .	51
Figura 9 – Dependência do parâmetro $\alpha$ com a massa $M_{vir}$ do halo e com o <i>redshift</i> $z$ (à esquerda) e com a altura de pico $\nu$ (à direita). As curvas sólidas correspondem aos resultados obtidos na Simulação do Milênio (em inglês, <i>Millenium Simulation</i> ) e as curvas tracejadas aos resultados obtidos em uma outra simulação menor, porém de melhor resolução de massa. Imagem retirada de (GAO et al., 2008). . . . .	58
Figura 10 – Funções de correlação cruzada halo-matéria (curvas tracejadas) e função de (auto)correlação matéria-matéria (curva sólida) obtidas na Simulação do Milênio (em inglês, <i>Millennium Simulation</i> ), em $z = 0$ . Imagem retirada de (HAYASHI; WHITE, 2008). . . . .	60
Figura 11 – Configuração geométrica simplificada de um sistema de lente gravitacional. Imagem adaptada de (UMETSU, 2020). . . . .	64
Figura 12 – Efeitos da convergência $\kappa(\vec{\theta})$ e das componentes real $\gamma_1(\vec{\theta})$ e imaginária $\gamma_2(\vec{\theta})$ do cisalhamento em uma fonte circular. O círculo preenchido em cinza é a forma da fonte e o contorno em preto é a forma da imagem lenteada. Distorções no formato (de circular para elíptico) ocorrem devido ao cisalhamento. Imagem retirada de (FORD, 2015). . . . .	71

- Figura 13 – Mapeamento de uma fonte pontual por uma lente de simetria circular. À esquerda, as curvas críticas radial (linha pontilhada) e tangencial (linha contínua) e as múltiplas imagens da fonte, no plano da lente. À direita, as respectivas cáusticas e a posição da fonte, no plano da fonte. Imagem adaptada de (NARAYAN; BARTELMANN, 1996). . . . . 73
- Figura 14 – Imagens de duas fontes extensas lenteadas pelo mesmo sistema da Figura 13. A fonte localizada próxima à caustica mais central (em forma de ponto) é imageada em dois longos arcos que se estendem tangencialmente próximos à curva crítica tangencial (t) e em uma imagem muitíssimo fraca no centro da lente. Já a outra fonte, localizada próxima a cáustica mais externa, é imageada em uma imagem estendida radialmente (composta pela fusão de duas imagens) que intersecta a curva crítica radial (r) e uma outra imagem alongada tangencialmente fora das curvas críticas. Imagem adaptada de (NARAYAN; BARTELMANN, 1996). . . . . 73
- Figura 15 – Simulação de um aglomerado de galáxias (modelado como uma esfera isotérmica singular) em *redshift*  $z = 0,15$  lenteando uma população de galáxias com *redshift* médio  $\bar{z} = 1$ . Na região mais próxima ao aglomerado, é possível observar os arcos radiais e tangenciais, que ocorrem no regime de lenteamento forte. Já nas regiões mais afastadas, como a região que foi expandida à direita, a elipticidade produzida pelo cisalhamento é menor que a elipticidade intrínseca das galáxias, como é esperado no regime de lenteamento fraco. A orientação média das galáxias nessa região é dada pelos traços sólidos no canto superior direito, sendo o traço inferior a orientação do cisalhamento produzido pelo aglomerado e o traço superior a orientação calculada a partir das 92 galáxias que estão na região. A diferença de inclinação entre os dois traços se dá devido às elipticidades e orientações intrínsecas das galáxias. Imagem retirada de (MELLIÉ, 1999). . . . . 76
- Figura 16 – Perfis de densidade dos halos (primeiro gráfico à esquerda) e suas derivadas logarítmicas (primeiro gráfico à direita) para diferentes modelos de perfis internos (Hernquist - HER, Navarro-Frenk-White - NFW e Einasto - EIN). Abaixo de cada um, apresenta-se um comparativo (diferença relativa) com os resultados obtidos com o pacote Colossus. Os resultados foram obtidos para um halo em *redshift*  $z = 0.1$  com  $M_{200m} = 10^{15} M_{\odot} h^{-1}$  e  $c_{200m} = 4$ , e considerando  $\Omega_{\Lambda,0} = 0,691$ ,  $\Omega_{m,0} = 0,3089$  e  $\Omega_{k,0} = 0$ . . . . . 89

Figura 17 – Perfis de densidade dos halos (primeiro gráfico à esquerda) e suas derivadas logarítmicas (primeiro gráfico à direita) para diferentes modelos de perfis internos (HER, NFW e EIN) combinados a um perfil externo $\rho_{ext}(r) = \rho_m(z)$ . Abaixo de cada um, apresenta-se um comparativo (diferença relativa) com os resultados obtidos com o pacote Colossus. Os resultados foram obtidos para um halo em <i>redshift</i> $z = 0.1$ com $M_{200m} = 10^{15} M_{\odot} h^{-1}$ e $c_{200m} = 4$ , e considerando $\Omega_{\Lambda,0} = 0,691$ , $\Omega_{m,0} = 0,3089$ e $\Omega_{k,0} = 0$ . . . . .	89
Figura 18 – Perfis de densidade dos halos (primeiro gráfico à esquerda) e suas derivadas logarítmicas (primeiro gráfico à direita) para diferentes modelos de perfis internos (HER, NFW e EIN) combinados a um perfil externo $\rho_{ext}(r) = \rho_{2h}(r)$ . Abaixo de cada um, apresenta-se um comparativo (diferença relativa) com os resultados obtidos com o pacote Colossus. Os resultados foram obtidos para um halo em <i>redshift</i> $z = 0.1$ com $M_{200m} = 10^{15} M_{\odot} h^{-1}$ e $c_{200m} = 4$ , e considerando $\Omega_{\Lambda,0} = 0,691$ , $\Omega_{m,0} = 0,3089$ e $\Omega_{k,0} = 0$ . . . . .	90
Figura 19 – Perfis de densidade dos halos (primeiro gráfico à esquerda) e suas derivadas logarítmicas (primeiro gráfico à direita) para diferentes modelos de perfis internos (HER, NFW e EIN) combinados a um perfil externo $\rho_{ext}(r) = \rho_{2h}(r) + \rho_m(z)$ . Abaixo de cada um, apresenta-se um comparativo (diferença relativa) com os resultados obtidos com o pacote Colossus. Os resultados foram obtidos para um halo em <i>redshift</i> $z = 0.1$ com $M_{200m} = 10^{15} M_{\odot} h^{-1}$ e $c_{200m} = 4$ , e considerando $\Omega_{\Lambda,0} = 0,691$ , $\Omega_{m,0} = 0,3089$ e $\Omega_{k,0} = 0$ . . . . .	90
Figura 20 – Densidades superficiais de massa (implementação das funções analíticas no gráfico de cima à esquerda e da integração numérica no gráfico de cima à direita), densidades superficiais de massa média (gráfico de baixo à esquerda) e excessos de densidade superficial de massa (gráfico de baixo à direita), para diferentes modelos de perfis internos (HER, NFW e EIN). Abaixo de cada um, apresenta-se um comparativo (diferença relativa) com os resultados obtidos com o pacote Colossus. Os resultados foram obtidos para um halo em <i>redshift</i> $z = 0.1$ com $M_{200m} = 10^{15} M_{\odot} h^{-1}$ e $c_{200m} = 4$ , e considerando $\Omega_{\Lambda,0} = 0,691$ , $\Omega_{m,0} = 0,3089$ e $\Omega_{k,0} = 0$ . . . . .	91
Figura 21 – Representação de um sistema de N-corpos. Imagem gerada com auxílio de ferramentas disponíveis no pacote TikZ (TANTAU, 2020). . . . .	105

# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>1</b>	<b>MODELO PADRÃO DA COSMOLOGIA MODERNA</b> . . . . .	<b>25</b>
1.1	Princípio de Copérnico, Homogeneidade e Isotropia . . . . .	25
1.2	Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) . . . . .	26
1.3	Equações de Campo de Einstein . . . . .	27
1.4	Equações de Friedmann . . . . .	29
1.5	<i>Redshift</i> e Fator de escala . . . . .	29
1.6	Parâmetros Cosmológicos . . . . .	30
1.7	Distâncias em Cosmologia . . . . .	32
1.7.1	Distância Comóvel Longitudinal . . . . .	33
1.7.2	Distância Comóvel Transversal . . . . .	33
1.7.3	Distância de Diâmetro Angular . . . . .	34
<b>2</b>	<b>FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS</b> . . . . .	<b>37</b>
2.1	Funções de Correlação e Espectro de Potência . . . . .	37
2.2	Variância do Contraste de Densidade de Matéria . . . . .	39
2.3	Crescimento Não-Linear das Perturbações (Modelo de Colapso Esférico <i>Top-hat</i> ) . . . . .	41
2.4	Contraste de Densidade Crítico para Colapso no Regime Linear . . . . .	44
2.5	Altura de Pico e Massa Característica . . . . .	45
<b>3</b>	<b>AGLOMERADOS DE GALÁXIAS E HALOS DE MATÉRIA ESCURA</b> . . . . .	<b>47</b>
3.1	Conexão entre Halos e Aglomerados . . . . .	47
3.2	Sobredensidades Esféricas . . . . .	48
3.3	Raio <i>Splashback</i> . . . . .	50
<b>4</b>	<b>PERFIS DE DENSIDADE DE MATÉRIA DE HALOS DE MATÉRIA ESCURA</b> . . . . .	<b>53</b>
4.1	<b>Perfil Interno</b> . . . . .	<b>53</b>
4.1.1	Perfil Hernquist . . . . .	53
4.1.2	Perfil NFW . . . . .	54
4.1.3	Perfil Einasto . . . . .	56
4.1.4	Perfil DK14 . . . . .	58
4.2	<b>Perfil Externo</b> . . . . .	<b>59</b>
4.2.1	Termo de densidade média de matéria . . . . .	59

4.2.2	Termo de densidade de 2-halo . . . . .	59
4.2.3	Termo de lei de potências . . . . .	61
<b>5</b>	<b>TEORIA DO LENTEAMENTO GRAVITACIONAL . . . . .</b>	<b>63</b>
5.1	Equação da Lente . . . . .	63
5.2	Ângulo de Deflexão . . . . .	64
5.3	Densidade Superficial de Massa e Convergência . . . . .	69
5.4	Potencial da Lente . . . . .	69
5.5	Matriz Jacobiana . . . . .	70
5.6	Magnificação, curvas críticas e cóusticas . . . . .	72
<b>6</b>	<b>LENTEAMENTO GRAVITACIONAL FRACO . . . . .</b>	<b>75</b>
6.1	Elipticidade e Cisalhamento . . . . .	75
6.2	Algoritmo de Kaiser & Squires . . . . .	77
6.3	Degenerescência da Folha de Massa . . . . .	78
<b>7</b>	<b>MODELOS DE LENTE PARA OS PERFIS . . . . .</b>	<b>81</b>
7.0.1	Lente Hernquist . . . . .	85
7.0.2	Lente NFW . . . . .	85
7.0.3	Lente Einasto . . . . .	85
<b>8</b>	<b>CÓDIGO ESCRITO E RESULTADOS . . . . .</b>	<b>87</b>
	Conclusão . . . . .	93
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>95</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>103</b>
	<b>APÊNDICE A – TEOREMA DO VIRIAL . . . . .</b>	<b>105</b>
	<b>APÊNDICE B – PSEUDOEVOLUÇÃO DE MASSA DE UM HALO ESTÁTICO . . . . .</b>	<b>109</b>

# Introdução

Os aglomerados de galáxias são as maiores e mais massiva estruturas ligadas gravitacionalmente e em equilíbrio dinâmico (ou próximo dele) do universo. Uma vez que resultam da formação de estrutura em grande escala, aglomerados de galáxias são laboratórios únicos de processos astrofísicos, bem como são importantes para estudos em Cosmologia.

Infelizmente, não é possível medir a massa total e a distribuição de massa de um aglomerado diretamente. Essas medidas só podem ser realizadas de forma indireta a partir de observáveis, como a distribuição de velocidade das galáxias do aglomerado, a emissão em raio X do meio intracluster (gás quente que permeia o aglomerado), o efeito Sunyaev-Zeldovich (espalhamento Compton inverso de fótons da radiação cósmica de fundo), os sinais de lenteamento gravitacional, entre outros (veja, por exemplo, (SCHNEIDER, 2006) e (KRAVTSOV; BORGANI, 2012)).

Em 1933, Zwicky (ANDERNACH; ZWICKY, 2017), ao observar a distribuição de velocidade das galáxias do Aglomerado de Coma e assumir que a estrutura estava em equilíbrio dinâmico, constatou que era necessário que o aglomerado tivesse muito mais massa do que apresentava ter ao se somar as massas de todas galáxias que o compunham. Ele cunhou essa grande quantidade de matéria não-luminosa necessária de matéria escura. Alguns anos depois, Smith (SMITH, 1936) constatou o mesmo ao observar o Aglomerado de Virgem: apenas a matéria luminosa das galáxias era insuficiente para explicar as velocidades observadas.

Em 1962 e anos posteriores, Rubin (ver (RUBIN, 2000)) obteve as curvas de rotação de galáxias vizinhas à nossa, como a Galáxia de Andrômeda, e observou que as velocidades das estrelas não decaíam com a distância como esperado pela Lei de Kepler. Era necessária uma grande quantidade de massa invisível para explicar porque as estrelas mais distantes se moviam à mesma velocidade das estrelas mais próximas do centro, conforme observado.

Essa descoberta de Rubin constituiu uma importante evidência da matéria escura teorizada por Zwicky. Hoje, sabe-se que os aglomerados são constituídos majoritariamente de matéria escura ( $\sim 80\%$  da massa total), e também de gás quente ( $\sim 15\%$ ) e galáxias ( $\sim 3\%$ ) (SCHNEIDER, 2006).

No final da década de 1980, foram descobertos os primeiros grandes arcos gravitacionais em aglomerados de galáxias (veja, por exemplo, Soucail et. al. (SOUCAIL et al., 1987) e Lynds & Petrosian (LYNDS; PETROSIAN, 1989)). Esses grandes arcos (ver Figura 1) surgem devido ao lenteamento gravitacional, no regime forte, de galáxias ao

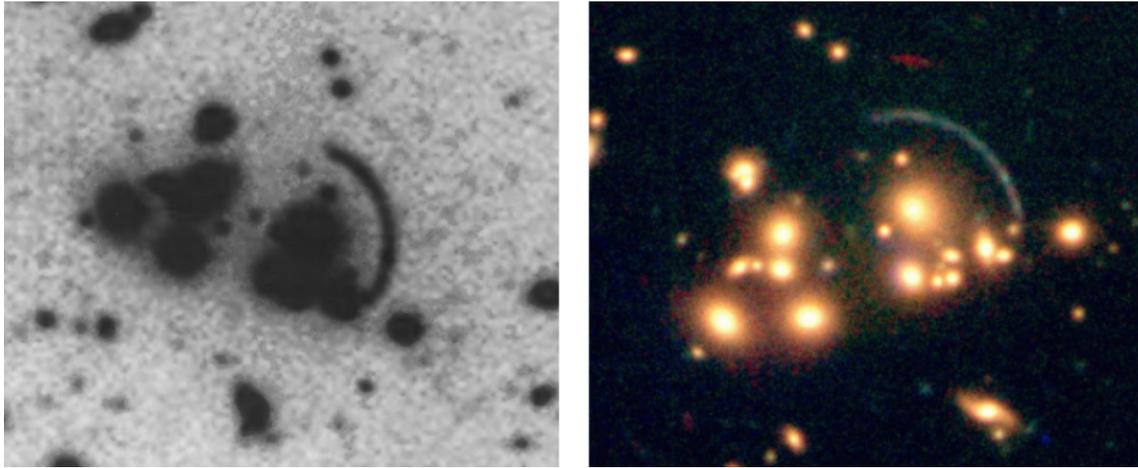


Figura 1 – Aglomerado de Galáxias CL2244-02, situado em *redshift*  $z = 0,3$ . Junto a ele, é possível notar um arco resultante do lenteamento gravitacional forte de uma galáxia em *redshift*  $z = 2,24$ . Imagem da esquerda retirada de (LYNDS; PETROSIAN, 1989) e imagem da direita retirada de (ESO, 1998).

fundo do aglomerado<sup>1</sup>. Na mesma época, Fort et. al. (FORT et al., 1988) observaram, no aglomerado Abel 370, que haviam outros objetos menos luminosos, mais azuis que as galáxias do aglomerado e menos esticados que um grande arco, que também pareciam ser imagens de galáxias ao fundo lenteadas gravitacionalmente.

Em 1990, Tyson et. al. (TYSON; VALDES; WENK, 1990) investigou essas galáxias ao fundo que se distorciam levemente ao longo de círculos centrados no aglomerado para obter o mapeamento da distribuição de matéria em dois aglomerados, um deles o aglomerado Abell 1689, mostrado na Figura 2. Em 1993, Kaiser & Squires (KAISER; SQUIRES, 1993) desenvolveram, pela primeira vez, um algoritmo para a obtenção da distribuição projetada de massa de aglomerados a partir das elipticidades das galáxias de fundo fracamente lenteadas, sem que fossem necessários outros parâmetros.

Assim, o sinal do lenteamento fraco, tomado a partir de pequenas - porém, coerentes - distorções na forma de galáxias, pode ser usado para se obter uma medida da distribuição superficial de massa de um aglomerado de galáxias. Uma característica importante desse observável é que ele permite que essa distribuição seja obtida sem que sejam necessárias considerações sobre o estado dinâmico e termodinâmico do aglomerado. No entanto, essa distribuição de massa obtida pelo sinal do lenteamento fraco não está isenta de efeitos sistemáticos, como *miscentering*, que ocorre quando o centro do halo não coincide exatamente com o centro assumido para a medida dos perfis de cisalhamento tangencial (conforme será abordado bem mais adiante, no Capítulo 7); triaxialidade e projeção; contaminação de sinais de galáxias à frente do aglomerado ou do próprio aglo-

<sup>1</sup> Os aglomerados de galáxias não são as únicas estruturas que podem produzir uma imagem fortemente lenteada de um objeto luminoso ao fundo. O lenteamento gravitacional forte também pode ocorrer devido a galáxias e grupos de galáxias (FURLANETTO, 2012) (TERGOLINA, 2020).



Figura 2 – Aglomerado de Galáxias Abell 1689, situado em *redshift*  $z = 0,18$ . Imagem da esquerda retirada de (TYSON; VALDES; WENK, 1990) e imagem da direita retirada de (HUBBLE/ESA, 2013).

merado; entre outros. Por isso, simulações computacionais também são necessárias para aprimorar a reconstrução da densidade projetada de massa obtida pelo sinal do lenteamento fraco e ajudar na compreensão dos efeitos sistemáticos envolvidos (COMBET et al., 2019). Ao longo dos anos, as técnicas de reconstrução da folha de massa (em inglês, *mass-sheet*) também têm sido aprimoradas para levar em conta os efeitos observacionais e instrumentais existentes<sup>2</sup>.

Diante disso, esse trabalho se propõe como uma breve revisão (em português) da literatura sobre perfis de densidade de matéria de halos de matéria escura e lenteamento gravitacional fraco de aglomerados de galáxias. Além da revisão, foi confeccionado também um código escrito em *Python* em formato de *Jupyter Notebook* (.ipynb), com o intuito didático, ou seja, para que servisse de aprendizado e experiência em programação. Espera-se que a revisão e o código escritos, bem como as referências citadas, sejam úteis para demais interessados em aprender sobre os temas abordados.

Esse trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1, apresentamos o Modelo Padrão da Cosmologia Moderna, em que se assume a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker para o espaço-tempo e em que se considera um universo composto apenas de matéria (bariônica e escura), radiação (fótons), energia escura (assumida enquanto constante cosmológica) e uma certa curvatura. No Capítulo 2, descrevemos como se caracteriza o campo de densidade de matéria, em grande escala, e como se dá o crescimento de perturbações nesse campo no regime não-linear (mais especificamente, assumindo o modelo de colapso esférico *top-hat*) e linear. No Capítulo 3 discutimos bre-

<sup>2</sup> Alguns desses efeitos envolvidos estão relacionados ao tamanho finito dos espelhos, à óptica complicada envolvida nos telescópios e, se a coleta de dados é realizada no solo, à turbulência atmosférica (HOEKSTRA; JAIN, 2008).

vemente a história da formação dos grandes halos de matéria e como eles se relacionam aos aglomerados de galáxias. No Capítulo 4, apresentamos diferentes perfis de densidade de matéria de halos de matéria escura que se ajustam bem a simulações de N-corpos realizadas nas últimas décadas. No Capítulo 5, fazemos um breve estudo sobre o efeito do Lenteamento Gravitacional, assumindo aproximações de lente fina e de campo fraco. No Capítulo 6, discutimos como o sinal do lenteamento fraco pode ser utilizado para se realizar a reconstrução da folha de massa de um aglomerado. No Capítulo 7, escrevemos os modelos de lente para alguns perfis apresentados no Capítulo 4 e a relação deles com a componente radial-tangencial do cisalhamento. E, finalmente, no Capítulo 8, apresentamos os resultados obtidos de um código desenvolvido para gerar, para diferentes perfis apresentados no Capítulo 4, as curvas do perfil de densidade, da derivada logarítmica do perfil de densidade, da densidade superficial de massa e outras quantidades relacionadas.

# 1 Modelo Padrão da Cosmologia Moderna

Neste primeiro capítulo, serão discutidos conceitos básicos do Modelo Padrão da Cosmologia Moderna. Descrições mais detalhadas podem ser encontradas em (DODELSON, 2003) (caps. 1 e 2), (CARROLL, 2004) (cap. 8), (NORMAN, 2005) (sec. 2.1), (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006) (cap. 14 e 15), (RINDLER, 2006) (cap. 18) e (VITENTI, 2011) (cap. 2).

## 1.1 Princípio de Copérnico, Homogeneidade e Isotropia

Um dos princípios do Modelo Padrão da Cosmologia Moderna é o de que o universo, visto em grande escala, é praticamente igual em todo lugar. Essa ideia de que nenhuma posição ou direção no universo é privilegiada é conhecida como Princípio de Copérnico (ou Princípio Cosmológico). Essa nomenclatura se dá em homenagem à defesa de Copérnico, na época em que a teoria vigente era o geocentrismo, de que suas observações indicavam que a Terra não estaria em uma posição especial.

É evidente que o princípio de Copérnico não é válido em pequenas escalas, uma vez que a vizinhança de um ponto próximo a uma estrela é muito diferente da vizinhança de um ponto em uma região vazia e fria do universo, por exemplo. Mas, em grande escala, a validade desse princípio manifesta-se em diferentes observações, como, por exemplo, nos dados da radiação cósmica de fundo (em inglês, *cosmic microwave background* (CMB)).

Baseando-se no princípio de Copérnico, o espaço (ou a parte espacial do espaço-tempo) pode ser considerado homogêneo e isotrópico. Diante disso, o espaço-tempo pode ser modelado como uma variedade<sup>1</sup> quadridimensional  $M = \mathbb{R} \times \Sigma$  (do inglês, *manifold*), em que  $\Sigma$  é uma subvariedade maximalmente simétrica<sup>2</sup> tridimensional de  $M$ , que repre-

<sup>1</sup> Uma variedade n-dimensional (real e diferenciável)  $M$  é um conjunto formado por uma coleção de subconjuntos abertos  $\{O_\alpha\}$  tal que

- a)  $\{O_\alpha\}$  cobre todo  $M$ ;
- b) para cada  $O_\alpha$  existe um mapa bijetor  $\psi_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha$ , em que  $U_\alpha$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ;
- c) se dois subconjuntos  $O_\alpha$  e  $O_\beta$  se interseccionam, i.e.  $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$ , a composição de mapas  $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$  é um mapa infinitamente diferenciável e contínuo  $C^\infty$  que leva pontos em  $\psi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  em pontos em  $\psi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^n$ .

Para mais detalhes, veja (WALD, 1984). Assim, um espaço, mesmo que curvo ou que apresente uma topologia complicada, que possa ser confeccionado ao se “costurar suavemente” regiões que “parecem”  $\mathbb{R}^n$ , pode ser considerado uma variedade (CARROLL, 2004) (sec. 2.2).

<sup>2</sup> Uma variedade maximalmente simétrica é aquela que possui o maior número possível de simetrias de translação e de rotação, ou seja, uma variedade cuja curvatura é a mesma em todos os pontos e em todas as direções. Segue disso que, se uma variedade é maximalmente simétrica, ela é homogênea e isotrópica em todos os pontos. Alguns exemplos de variedades maximalmente simétricas são os espaços euclidianos n-dimensionais  $E^n$  e as esferas n-dimensionais  $S^n$  (CARROLL, 2004) (sec. 3.9 e 8.1).

representa a secção espacial do espaço-tempo, e  $\mathbb{R}$  é uma subvariedade unidimensional, que representa a direção temporal.

O elemento de linha no espaço-tempo  $M$  pode, então, ser escrito como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\sigma^2, \quad (1.1)$$

em que  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $a(t)$  é um fator de escala e  $d\sigma^2$  é o elemento de linha na subvariedade  $\Sigma$ . Vale ressaltar que, se  $\Sigma$  é maximalmente simétrica, então ela é também esfericamente simétrica.

## 1.2 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

Partindo do pressuposto de que o universo é homogêneo (invariante por translações no espaço), isotrópico (invariante por rotações no espaço) e evolui de tamanho com o tempo (o tamanho da secção espacial  $\Sigma$  aumenta com  $t$ ), o intervalo entre dois eventos  $(t_1, r_1, \theta_1, \phi_1)$  e  $(t_2, r_2, \theta_2, \phi_2)$  é dado por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (1.2)$$

em que  $a(t)$  é o fator de escala adimensional e  $\kappa$  é uma constante associada à curvatura da secção espacial  $\Sigma$ .

Se  $\kappa$  é negativo,  $\Sigma$  tem curvatura constante e negativa, tal que a secção espacial é dita aberta (ou o espaço é dito aberto). Se  $\kappa$  é positivo,  $\Sigma$  tem curvatura constante e positiva e a secção espacial é dita fechada. Por fim, se  $\kappa = 0$ , não há curvatura em  $\Sigma$  e o espaço é plano.

A eq. (1.2) também pode ser escrita, em notação de Einstein,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.3)$$

com  $dx^0 = dt$ ,  $dx^1 = dr$ ,  $dx^2 = d\theta$  e  $dx^3 = d\phi$ . A partir disso, define-se o tensor métrica, que para o caso de um universo homogêneo, isotrópico e em expansão é conhecido como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), cuja forma matricial é

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1 - \kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Como é possível perceber, a métrica evolui temporalmente com o fator de escala  $a = a(t)$ .

A partir do tensor métrica, tem-se também o tensor métrica inversa,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\kappa r^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

tal  $g^{\nu\beta}g_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\nu$ , em que  $\delta_\alpha^\nu$  é o delta de Kronecker, que é sempre igual a 0, a menos que  $\nu = \alpha$ , quando é igual a 1.

### 1.3 Equações de Campo de Einstein

De acordo com a Teoria da Relatividade Geral, a métrica está relacionada com a matéria e a energia do universo por meio das equações de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

em que  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein,  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci,  $R$  é o escalar de Ricci,  $G$  é a constante gravitacional e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento. Essas equações ainda podem ser escritas na forma

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right), \quad (1.7)$$

já que a contração (no caso, multiplicação por  $g^{\mu\nu}$ ) de ambos os lados da eq. (1.6) implica em  $R = -8\pi GT/c^4$ , com  $T \equiv g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ .

O tensor de Ricci depende da métrica e de suas derivadas, tal

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha}, \quad (1.8)$$

em que

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left[ \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right] \quad (1.9)$$

é o símbolo de Christoffel de segundo tipo. O escalar de Ricci, por sua vez, se dá pela contração do tensor de Ricci

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

Diante das eqs. (1.8), (1.9) e (1.10), pode-se notar que o lado esquerdo da eq. (1.6) é função apenas da métrica.

Calculando os símbolos de Christoffel de segundo tipo para a métrica de FLRW, os únicos não nulos são

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{11} &= \frac{1}{c^2} \left( \frac{a\dot{a}}{1 - \kappa r^2} \right), & \Gamma^1_{11} &= \frac{\kappa r}{1 - \kappa r^2}, \\
\Gamma^0_{22} &= \frac{1}{c^2} (a\dot{a}r^2), & \Gamma^1_{22} &= -r(1 - \kappa r^2), \\
\Gamma^0_{33} &= \frac{1}{c^2} (a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta), & \Gamma^1_{33} &= -r(1 - \kappa r^2) \sin^2 \theta, \\
\Gamma^1_{01} &= \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03} = \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \\
\Gamma^1_{10} &= \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{30} = \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta, \\
& & \Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \cotg \theta,
\end{aligned}$$

em que  $\dot{a} \equiv da/dt$ , lembrando que os símbolos de Christoffel de segundo tipo são simétricos nos dois índices inferiores, i.e.  $\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb}$ . Disso, tem-se que as componentes não nulas do tensor de Ricci para a métrica de FLRW são

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, & R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa c^2}{(1 - \kappa r^2)c^2}, \\
R_{22} &= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa c^2)r^2 c^{-2}, & R_{33} &= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa c^2)r^2 \sin^2 \theta c^{-2},
\end{aligned}$$

e o escalar de Ricci é

$$R = \frac{6}{c^2} \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa c^2}{a^2} \right]. \quad (1.11)$$

Os símbolos de Christoffel de segundo tipo, as componentes do tensor de Ricci e o escalar de Ricci para a métrica de FLRW e para outras métricas podem ser encontrados em (MÜLLER; GRAVE, 2014) (sec. 2.11 para FLRW).

Por sua vez, o lado direito da eq. (1.6) carrega toda a informação sobre o conteúdo material e energético do universo. Assumindo um modelo tal que toda a matéria e energia são descritas por um fluido perfeito, caracterizado em cada ponto por uma densidade  $\rho$  e uma pressão isotrópica  $p$ , o tensor Energia-Momento assume, no mesmo referencial da métrica de FLRW (eq. (1.4)), a forma diagonal

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^4 \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left( \frac{a^2}{1 - \kappa r^2} \right) p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 r^2) p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a^2 r^2 \sin^2 \theta) p \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

ou

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(-g_{00}c^2\rho, g_{ii}p), \quad (1.13)$$

de modo que

$$T \equiv g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = -c^2\rho + 3p. \quad (1.14)$$

Para um universo homogêneo e isotrópico,  $\rho$  e  $p$  devem ser funções apenas da coordenada temporal  $t$ , i.e. não devem depender das coordenadas espaciais  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ .

Retornando às equações de campo de Einstein, tal eq. (1.6), para  $\mu\nu = 00$  tem-se

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\kappa c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (1.15)$$

e para  $\mu\nu = 11$ ,  $\mu\nu = 22$  ou  $\mu\nu = 33$ , tem-se

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\kappa c^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}p. \quad (1.16)$$

## 1.4 Equações de Friedmann

Manipulando um pouco as eqs. (1.15) e (1.16), chega-se finalmente às equações de Friedmann em suas formas mais convencionais

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa c^2}{a^2}, \quad (1.17)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right), \quad (1.18)$$

que determinam juntas a evolução temporal do fator de escala.

Focando na eq. (1.17), é útil definir o parâmetro de Hubble-Lemaître<sup>3</sup>

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.19)$$

que está relacionado a quão rapidamente o fator de escala muda com o tempo.

O fator de escala  $a(t)$  estabelece a proporção entre a distância comóvel e a distância física, em um determinado instante. Se o universo não mudasse de tamanho, essas duas distâncias seriam equivalentes. Porém, em um universo em expansão, a distância física entre dois pontos aumenta com o tempo, ou seja, o fator de escala cresce com o tempo, enquanto a distância comóvel permanece inalterada.

## 1.5 Redshift e Fator de escala

Uma das primeiras evidências de que o nosso universo está em expansão foi a verificação, por Hubble (HUBBLE, 1929), de que as outras galáxias distantes se afastam da nossa a velocidades maiores quanto maior a distância. Devido a essa expansão do universo, o espectro da luz emitida pelos objetos luminosos dessas galáxias chega até a Terra desviado para o vermelho, isto é, as ondas eletromagnéticas emitidas por esses

<sup>3</sup> Nomenclatura conforme recomendação da União Astronômica Internacional (IAU, 2018).

objetos são esticadas a medida que viajam pelo espaço, de modo que o comprimento de onda que se observa é maior que o emitido.

Para medir esse “fator de esticamento”, tem-se a definição de *redshift* (em português, desvio para o vermelho),  $z$ , tal

$$\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emit}} \equiv 1 + z, \quad (1.20)$$

ou ainda

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{emit}}, \quad (1.21)$$

em que  $\lambda_{emit}$  é o comprimento de onda do fóton emitido,  $\lambda_{obs}$  é o comprimento de onda do fóton observado e  $\Delta\lambda = \lambda_{obs} - \lambda_{emit}$ . Como a luz desses objetos visíveis distantes leva um tempo para chegar à Terra, quando se observa o céu vê-se sempre o passado, isto é, como esses objetos eram quando emitiram a radiação. Dessa forma, o *redshift* se relaciona com o tempo, tal que, quanto maior o *redshift* (maior o  $z$ ), mais ao passado vê-se o objeto (menor o  $t$ ).

Uma vez que o "esticamento" do comprimento de onda do fóton se dá devido à evolução do fator de escala, o *redshift* também se relaciona com o fator de escala, em uma dada época, conforme

$$\frac{1}{a} = 1 + z, \quad (1.22)$$

de modo que na época presente  $z = 0$ ,  $a = 1$ . Uma vantagem do *redshift* em relação ao fator de escala é que ele é observável (por definição, tal eq. (1.21)).

## 1.6 Parâmetros Cosmológicos

Retornando à primeira equação de Friedmann, eq. (1.17),  $\rho$  é a soma das densidades de cada um dos fluidos perfeitos que compõem o conteúdo material e energético do universo, i.e.  $\rho = \sum_i \rho_i$ , em que cada índice conta para uma das componentes, que pode incluir bárions e léptons (matéria bariônica), matéria escura, fótons (radiação), neutrinos, energia escura etc. Assim, a eq. (1.17) pode ser escrita como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{\kappa c^2}{a^2}, \quad (1.23)$$

e é conveniente introduzir os parâmetros  $\Omega$ , tal

$$\Omega_k \equiv \frac{-\kappa c^2}{(aH)^2}, \quad (1.24)$$

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{crit}}, \quad (1.25)$$

em que

$$\rho_{crit} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.26)$$

é a denominada densidade crítica do universo, de forma que

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_k = 1. \quad (1.27)$$

Assumindo que as principais componentes materiais e energéticas que constituem o universo são a matéria (bariônica e escura)  $m$ , os fótons (radiação)  $\gamma$  e a energia escura (enquanto constante cosmológica)  $\Lambda$ , os parâmetros  $\Omega_i$  assumem as relações

$$\Omega_m \equiv \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_m, \quad \Omega_\gamma \equiv \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_\gamma, \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad (1.28)$$

com  $\Omega_m + \Omega_\gamma + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa = 1$ . No tempo presente  $z = 0$  (ou  $a = 1$ ), tem-se os parâmetros  $\Omega_{i,0} \equiv \Omega_i(z = 0)$ , tal

$$\Omega_{m,0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{m,0}, \quad \Omega_{\gamma,0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{\gamma,0}, \quad \Omega_{\Lambda,0} = \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \quad \Omega_{\kappa,0} = \frac{-\kappa c^2}{H_0^2}, \quad (1.29)$$

com  $H_0 \equiv H(z = 0)$ ,  $\rho_{i,0} \equiv \rho_i(z = 0)$  e  $\Omega_{m,0} + \Omega_{\gamma,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{\kappa,0} = 1$ .

Frente às eqs. (1.28) e (1.29), é interessante que as relações entre  $\rho_i$  e  $\rho_{i,0}$  sejam obtidas, para que se possa obter também as relações entre  $\rho_i$  e  $\Omega_{i,0}$ , para cada uma das componentes.

Retornando à eq. (1.15), pode-se multiplicá-la por  $a^3$ , derivar esse produto em relação ao tempo e comparar a expressão resultante com a eq. (1.16), de modo que chegue-se a

$$-\dot{a} \left( \frac{p}{c^2} + \rho \right) = \frac{a}{3} \dot{\rho} \quad (1.30)$$

Para prosseguir, pode-se assumir que os fluidos perfeitos considerados obedecem uma equação de estado dada por

$$p_i = w_i \rho_i c^2, \quad (1.31)$$

com  $w_i$  uma constante independente do tempo, de modo que a eq. (1.30) possa ser escrita

$$\frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} = -3(1 + w_i) \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.32)$$

Essa eq. (1.32) pode ser integrada, tal que se obtém

$$\rho_i \propto a^{-3(1+w_i)}. \quad (1.33)$$

Introduzindo a notação  $\rho_{i,0} = \rho_i(a = 1) = \rho_i(z = 0)$  para se referir a densidade de uma componente no tempo presente, tem-se

$$\rho_i(a) = \frac{\rho_{i,0}}{a^{3(1+w_i)}}, \quad (1.34)$$

uma expressão que evidencia como se dá a dependência da densidade de matéria (ou energia) com o fator de escala. As diferentes componentes consideradas têm diferentes constantes  $w_i$ , de forma que a densidade de matéria é proporcional a  $a^{-3}$  (já que o volume do universo escala com  $a^{-3}$ ), a densidade de radiação a  $a^{-4}$  (já que além do volume do universo escalar com  $a^{-3}$  o comprimento de onda do fóton escala com  $a^{-1}$ ) e a densidade de energia escura a  $a^0$  (já que foi assumida enquanto constante cosmológica),

$$\rho_m(a) = \frac{\rho_{m,0}}{a^3}, \quad \rho_\gamma(a) = \frac{\rho_{\gamma,0}}{a^4}, \quad \rho_\Lambda(a) = \rho_{\Lambda,0}, \quad (1.35)$$

ou seja, tal  $w_m = 0$ ,  $w_\gamma = \frac{1}{3}$  e  $w_\Lambda = -1$ .

A partir das eqs. (1.35), (1.29) e (1.26), as densidades das componentes podem ser expressas em função da densidade crítica do universo no tempo presente  $\rho_{crit,0} \equiv \rho_{crit}(z=0)$ , de  $\Omega_{i,0}$  e do *redshift*  $z$ . Por exemplo, a densidade de matéria  $\rho_m$  pode ser expressa por

$$\rho_m(z) = \rho_{crit,0} \Omega_{m,0} (1+z)^3. \quad (1.36)$$

Utilizando as eqs. (1.35) e (1.29), a primeira equação de Friedmann, na forma da eq. (1.23), pode ser escrita, ainda, em termos dos valores atuais dos parâmetros cosmológicos,

$$H^2(a) = H_0^2 \left( \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{\gamma,0}}{a^4} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{\Omega_{k,0}}{a^2} \right), \quad (1.37)$$

ou

$$H^2(z) = H_0^2 E^2(z), \quad (1.38)$$

em que

$$E^2(z) = \Omega_{m,0} (1+z)^3 + \Omega_{\gamma,0} (1+z)^4 + \Omega_{k,0} (1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \quad (1.39)$$

é a denominada taxa de expansão normalizada e  $H_0$  é a constante de Hubble-Lemaître. É comum que  $H_0$  apareça parametrizado por  $h$ , tal

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (1.40)$$

Note que, para o modelo de concordância  $\Lambda$ CDM ( $\Omega_m \approx 0,3$  e  $\Omega_\Lambda \approx 0,7$ ), a eq. (1.39) deixa evidente que a taxa de expansão do universo foi primeiro dominada pela radiação, em seguida dominada pelo conteúdo material, e, atualmente ( $z=0$ ), é dominada pela energia escura.

## 1.7 Distâncias em Cosmologia

Em Cosmologia, existem diferentes formas de se definir distâncias entre objetos. Nesta seção, algumas dessas definições serão apresentadas, tomando como base os trabalhos (HOGG, 1999), (BARTELMANN; SCHNEIDER, 2001) (sec. 2.1), (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006) (cap. 14) e (CONGDON; KEETON, 2018) (sec. 3.5). Como há algumas diferenças de nomenclatura entre as diferentes fontes, as definições aqui colocadas seguem a terminologia de (HOGG, 1999).

### 1.7.1 Distância Comóvel Longitudinal

A distância comóvel longitudinal (em inglês, *line-of-sight comoving distance*) é a distância percorrida em uma geodésica nula do espaço-tempo ( $ds = 0$  na eq. (1.2)), i.e. a distância percorrida na trajetória de um fóton. Por conveniência, pode-se escolher uma trajetória radial, com  $\theta$  e  $\phi$  fixo, tal que

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) d\chi^2 = 0, \quad (1.41)$$

em que

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}. \quad (1.42)$$

Assim, a distância comóvel (longitudinal) entre dois objetos em diferentes *redshifts*  $z_1$  e  $z_2$ , com  $z_2 > z_1$ , é

$$\begin{aligned} D_C(z_1, z_2) &= \int d\chi = c \int_{t(z_2)}^{t(z_1)} \frac{dt}{a(t)} \\ &= c \int_{a(z_2)}^{a(z_1)} \frac{da}{a^2 H(a)} \\ &= \frac{c}{H_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{E(z)}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

onde fez-se uso das eqs. (1.19), (1.22) e (1.38). Note que esse cálculo depende dos parâmetros  $\Omega_{i,0}$ , conforme eq. (1.39).

Para calcular a distância comóvel (longitudinal) de um certo objeto à Terra, basta substituir  $z_1 = 0$  (ou  $a(z_1) = 1$ ) na eq. (1.43), de forma que

$$D_C(z) = \chi(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}. \quad (1.44)$$

Importante notar que  $D_C(z_2) = D_C(z_1) + D_C(z_1, z_2)$ .

### 1.7.2 Distância Comóvel Transversal

A distância comóvel transversal (em inglês, *transverse comoving distance*) é a distância da coordenada radial

$$r = f_\kappa[\chi] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa}\chi) & \text{para } \kappa > 0 \\ \chi & \text{para } \kappa = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(\sqrt{-\kappa}\chi) & \text{para } \kappa < 0 \end{cases}, \quad (1.45)$$

conforme integração da eq. (1.42), tal que a eq. (1.2) pode ser reescrita

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + f_\kappa[\chi]^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (1.46)$$

A distância comóvel (transversal) a um certo *redshift*  $z$  é

$$D_M(z) = f_\kappa[\chi(z)] = \begin{cases} \frac{D_H}{\sqrt{\Omega_{\kappa,0}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{\Omega_{\kappa,0}}}{D_H} D_C(z)\right) & \text{para } \Omega_{\kappa,0} > 0 \\ D_C(z) & \text{para } \Omega_{\kappa,0} = 0, \\ \frac{D_H}{\sqrt{|\Omega_{\kappa,0}|}} \sin\left(\frac{\sqrt{|\Omega_{\kappa,0}|}}{D_H} D_C(z)\right) & \text{para } \Omega_{\kappa,0} < 0 \end{cases} \quad (1.47)$$

em que  $D_H = c/H_0$  é a distância de Hubble e o parâmetro  $\Omega_{\kappa,0}$  é dado pela eq. (1.29).

### 1.7.3 Distância de Diâmetro Angular

A distância de diâmetro angular (em inglês, *angular-diameter distance*) a um determinado objeto é definida

$$D_A \equiv \frac{L}{\Delta\theta}, \quad (1.48)$$

em que  $L$  é o diâmetro próprio e  $\Delta\theta$  é o diâmetro angular do objeto (o ângulo no céu compreendido pelo diâmetro próprio). Essa definição de distância é importante para a Teoria do Lenteamento Gravitacional, que será abordada no Capítulo 5.

O diâmetro próprio se relaciona com o diâmetro angular conforme a parte angular de eq. (1.46),

$$L = a(z_2) f_\kappa[\chi(z_2) - \chi(z_1)] \Delta\theta, \quad (1.49)$$

em que  $z_2$  é o *redshift* em que o objeto se encontra e  $z_1$  é o *redshift* do observador, tal  $z_2 > z_1$ , de modo que a eq. (1.48) pode ser escrita como

$$D_A(z_1, z_2) = \frac{f_\kappa[D_C(z_1, z_2)]}{(1 + z_2)}. \quad (1.50)$$

Porém, de acordo com a eq. (1.45), o cálculo de  $f_\kappa[\chi]$  é diferente conforme o valor de  $\kappa$ . Pode-se analisar separadamente, então, cada um dos três casos:

(i) para  $\kappa > 0$  tem-se

$$\begin{aligned} f_\kappa[D_C(z_1, z_2)] &= f_\kappa[\chi_2 - \chi_1] = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa}(\chi_2 - \chi_1)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\kappa}} [\sin(\sqrt{\kappa}\chi_2) \cos(\sqrt{\kappa}\chi_1) - \sin(\sqrt{\kappa}\chi_1) \cos(\sqrt{\kappa}\chi_2)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\kappa}} [\sin(\sqrt{\kappa}\chi_2) \sqrt{1 - \sin^2(\sqrt{\kappa}\chi_1)} - \sin(\sqrt{\kappa}\chi_1) \sqrt{1 - \sin^2(\sqrt{\kappa}\chi_2)}] \\ &= f_\kappa[\chi_2] \sqrt{1 - \sin^2(\sqrt{\kappa}\chi_1)} - f_\kappa[\chi_1] \sqrt{1 - \sin^2(\sqrt{\kappa}\chi_2)} \\ &= f_\kappa[\chi_2] \sqrt{1 - \kappa f_\kappa^2[\chi_1]} - f_\kappa[\chi_1] \sqrt{1 - \kappa f_\kappa^2[\chi_2]}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

em que  $\chi_1 = \chi(z_1)$  e  $\chi_2 = \chi(z_2)$ ;

(ii) para  $\kappa = 0$  tem-se

$$\begin{aligned} f_\kappa[D_C(z_1, z_2)] &= f_\kappa(\chi_2 - \chi_1) \\ &= f_\kappa[\chi_2] - f_\kappa[\chi_1], \end{aligned} \quad (1.52)$$

que é o mesmo que se obtém substituindo  $\kappa = 0$  na eq. (1.51);

(iii) para  $\kappa < 0$  tem-se

$$\begin{aligned}
f_\kappa[D_C(z_1, z_2)] &= \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(\sqrt{-\kappa}(\chi_2 - \chi_1)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} [\sinh(\sqrt{-\kappa}\chi_2) \cosh(\sqrt{-\kappa}\chi_1) - \sinh(\sqrt{-\kappa}\chi_1) \cosh(\sqrt{-\kappa}\chi_2)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} [\sinh(\sqrt{-\kappa}\chi_2) \sqrt{1 + \sinh^2(\sqrt{-\kappa}\chi_1)} - \sinh(\sqrt{-\kappa}\chi_1) \sqrt{1 + \sinh^2(\sqrt{-\kappa}\chi_2)}] \\
&= f_\kappa[\chi_2] \sqrt{1 + \sinh^2(\sqrt{-\kappa}\chi_1)} - f_\kappa[\chi_1] \sqrt{1 + \sinh^2(\sqrt{-\kappa}\chi_2)} \\
&= f_\kappa[\chi_2] \sqrt{1 - \kappa f_\kappa^2[\chi_1]} - f_\kappa[\chi_1] \sqrt{1 - \kappa f_\kappa^2[\chi_2]}.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

que é idêntica à eq. (1.51).

Diante disso, a distância de diâmetro angular entre dois objetos em diferentes *redshifts*  $z_1$  e  $z_2$ , tal  $z_2 > z_1$ , é

$$D_A(z_1, z_2) = \frac{1}{(1+z_2)} \left[ D_M(z_2) \sqrt{1 + \Omega_{\kappa,0} \left( \frac{D_M(z_1)}{D_H} \right)^2} - D_M(z_1) \sqrt{1 + \Omega_{\kappa,0} \left( \frac{D_M(z_2)}{D_H} \right)^2} \right]. \tag{1.54}$$

Vale notar aqui que  $z_1 = 0$  implica em

$$D_A(z) = \frac{D_M(z)}{(1+z)}, \tag{1.55}$$

e que, para  $\Omega_{\kappa,0} = 0$ ,

$$D_A(z_1, z_2) = D_A(z_2) - \frac{(1+z_1)}{(1+z_2)} D_A(z_1), \tag{1.56}$$

ou seja, mesmo para  $\kappa = 0$  (espaço plano),  $D_A(z_1, z_2) \neq D_A(z_2) - D_A(z_1)$ .



## 2 Formação de Estruturas

Neste segundo capítulo, funções e quantidades relacionadas ao contraste de densidade de matéria serão abordadas nas seções 2.1 e 2.2, enquanto a evolução temporal do contraste de uma perturbação será descrita no regime não-linear na seção 2.3. Em seguida, a evolução de uma perturbação será resgatada do regime não-linear para o regime linear na seção 2.4 e, por fim, as definições de altura de pico e de massa característica serão abordadas na seção 2.5.

### 2.1 Funções de Correlação e Espectro de Potência

Nesta seção, serão apresentadas as funções de correlação de n-pontos e o espectro de potência das flutuações do campo de densidade de matéria. As principais fontes consultadas foram (COORAY; SHETH, 2002) (sec. 2.1), (NORMAN, 2005) (sec. 2.2), (ZENTNER, 2007) (sec. 2) e (MARTINS, 2015) (sec. 3.2).

Em um certo *redshift*  $z$ , as flutuações no campo de densidade de matéria do universo  $\rho(\vec{x}, z)$  relativas à densidade média de matéria  $\rho_m(z)$  podem ser caracterizadas pelo contraste de densidade de matéria

$$\delta(\vec{x}, z) \equiv \frac{\rho(\vec{x}, z) - \rho_m(z)}{\rho_m(z)}. \quad (2.1)$$

A partir desse contraste de densidade  $\delta(\vec{x}, z)$ , as funções de correlação de n-pontos são definidas, no espaço das coordenadas reais,

$$\xi_n(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, z) \equiv \langle \delta(\vec{x}_1, z) \dots \delta(\vec{x}_n, z) \rangle, \quad (2.2)$$

de forma que a função de correlação de dois pontos é dada por

$$\xi_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, z) \equiv \langle \delta(\vec{x}_1, z) \delta(\vec{x}_2, z) \rangle, \quad (2.3)$$

em que  $\langle q \rangle$  é o valor esperado da variável estatística  $q$  dado um conjunto de amostras (também chamado *ensemble*). A função de correlação de dois pontos dá, então, a correlação estatística entre  $\delta(\vec{x}_1, z)$  e  $\delta(\vec{x}_2, z)$ .

A transformada de Fourier do contraste de densidade de matéria é

$$\delta(\vec{k}, z) = \int \delta(\vec{x}, z) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3\vec{x} \quad (2.4)$$

e a transformada inversa é

$$\delta(\vec{x}, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(\vec{k}, z) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3\vec{k}, \quad (2.5)$$

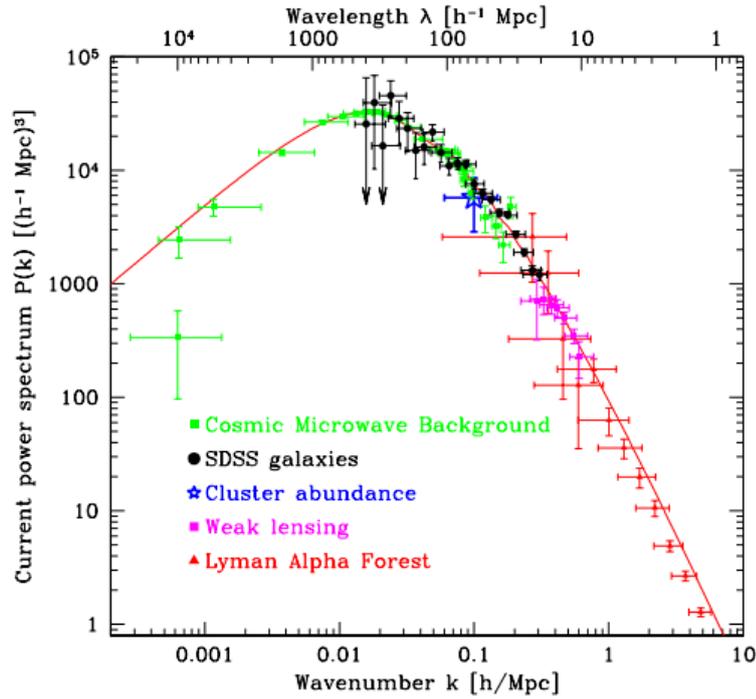


Figura 3 – Espectro de potência linear atual  $P(k, z = 0)$ . Os dados, com as respectivas barras de erro, são um compilado de diferentes medições, tanto de anisotropias da radiação cósmica de fundo quanto da distribuição em grande escala de galáxias, abundância de aglomerados, distorções na forma de galáxias (sinal do lenteamento fraco) e floresta Ly- $\alpha$ . Sobreposto aos dados, tem-se a curva contínua dada pelo modelo teórico de um universo com  $\Omega_{\kappa,0} = 0$ ,  $\Omega_{m,0} = 0,28$ ,  $\Omega_{b,0}/\Omega_{m,0} = 0,16$ ,  $h = 0,72$ . Imagem retirada de (TEGMARK et al., 2004).

tal que

$$\delta_{Dirac}(\vec{k} - \vec{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} d^3\vec{x} \quad (2.6)$$

é o delta de Dirac.

O espectro de potência das flutuações de densidade de matéria  $P(k, z)$ , por sua vez, é definido pela relação

$$\langle \delta(\vec{k}, z) \delta^*(\vec{k}', z) \rangle = (2\pi)^3 \delta_{Dirac}(\vec{k} - \vec{k}') P(k, z), \quad (2.7)$$

em que  $k = |\vec{k}|$  e  $\delta^*(\vec{k}', z)$  denota o complexo conjugado de  $\delta(\vec{k}', z)$ . O espectro de potência atual pode ser obtido a partir de diversas medições, conforme mostrado na Figura 3.

No paradigma do Modelo Padrão, assume-se que o contraste de densidade ao final do período da inflação (denominado contraste de densidade primordial) é um campo gaussiano homogêneo e isotrópico. Homogeneidade implica que a função de correlação de dois pontos é invariante por translações, ou seja, implica que  $\xi_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, z)$  é função apenas do vetor que separa os pontos  $\vec{x}_1$  e  $\vec{x}_2$ , i.e.  $\xi_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, z) = \xi_2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, z)$ . Já a isotropia implica que a função de correlação de dois pontos é invariante também por

rotações, de modo que  $\xi_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, z)$  é função apenas da distância entre os pontos  $\vec{x}_1$  e  $\vec{x}_2$ , i.e.  $\xi_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, z) = \xi_2(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|, z)$ .

Assim, a função de (auto)correlação de dois pontos, também denominada função de correlação matéria-matéria, pode ser calculada por

$$\begin{aligned}
\xi_2(r, z) &= \xi_{mm}(r, z) = \langle \delta(\vec{x}, z) \delta(\vec{x} + \vec{r}, z) \rangle \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{i\vec{k}'\cdot(\vec{x}+\vec{r})} \langle \delta(\vec{k}, z) \delta^*(\vec{k}', z) \rangle \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} (2\pi)^3 \delta_{Dirac}(\vec{k} - \vec{k}') P(k, z) \quad (2.8) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(k, z) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3k \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 P(k, z) j_0(kr) dk,
\end{aligned}$$

em que no último passo foi utilizada a identidade

$$\int_0^\pi e^{ikr\cos\theta} \sin\theta d\theta = 2j_0(kr) \quad (2.9)$$

(MEHREM, 2011) (eq. 2.6 do artigo, com  $L = 0$ ),  $j_0(kr) = \text{sen}(kr)/kr$  é a função esférica de Bessel de primeira espécie e ordem zero e  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{k}$  e  $\vec{r}$ . Note, na penúltima linha da eq. (2.8), que a função de correlação de dois pontos e o espectro de potência formam um par de transformada de Fourier, relação conhecida como Teorema de Wiener-Khinchin (ver, por exemplo, (WEISSTEIN, 2021)).

## 2.2 Variância do Contraste de Densidade de Matéria

Nessa seção, a variância do contraste de densidade de matéria será calculada. Foram consultados principalmente os trabalhos (COORAY; SHETH, 2002) (sec. 2.1), (ZENTNER, 2007) (sec. 2) e (PENNA-LIMA, 2010) (sec. 2.2).

Como a distribuição do contraste de densidade é assumida Gaussiana, pode-se determiná-la completamente por sua variância

$$V(\delta(\vec{x}, z)) = \langle \delta^2(\vec{x}, z) - \langle \delta(\vec{x}, z) \rangle^2 \rangle = \langle \delta^2(\vec{x}, z) \rangle, \quad (2.10)$$

em que  $\langle \delta(\vec{x}, z) \rangle = 0$  conforme eq. (2.1).

O contraste de densidade de matéria filtrado em uma escala  $R$  é dado por

$$\delta(\vec{x}, R, z) \equiv \int \tilde{W}(|\vec{y} - \vec{x}|, R) \delta(\vec{y}, z) d^3y, \quad (2.11)$$

em que  $\tilde{W}(|\vec{y} - \vec{x}|, R)$  é função janela (também denominada função filtro). Perceba que, de acordo com essa definição, a função janela tem unidades de inverso do volume.

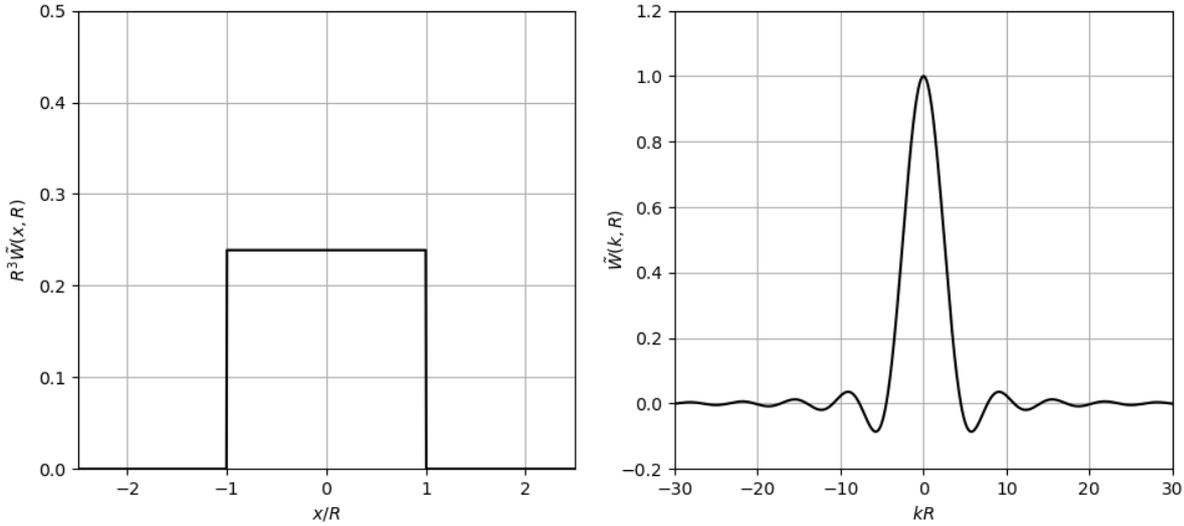


Figura 4 – Função janela do tipo cartola (*top-hat*) no espaço real (à esquerda) e no espaço de Fourier (à direita). Gráficos gerados com auxílio de ferramentas disponíveis nos pacotes NumPy (HARRIS et al., 2020) e matplotlib (HUNTER, 2007).

A variância de  $\delta(\vec{x}, R, z)$  pode ser então calculada, conforme eq. (2.10), por

$$\begin{aligned}
\sigma^2(R, z) &= \langle \delta^2(\vec{x}, R, z) \rangle \\
&= \int d^3y \tilde{W}(|\vec{y} - \vec{x}|, R) \int d^3y' \tilde{W}(|\vec{y}' - \vec{x}|, R) \langle \delta(\vec{y}, z) \delta(\vec{y}', z) \rangle \\
&= \int d^3y \tilde{W}(|\vec{y} - \vec{x}|, R) \int d^3y' \tilde{W}(|\vec{y}' - \vec{x}|, R) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{y}} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{y}'} \langle \delta(\vec{k}, z) \delta^*(\vec{k}', z) \rangle \\
&= \int d^3y \tilde{W}(|\vec{y} - \vec{x}|, R) \int d^3y' \tilde{W}(|\vec{y}' - \vec{x}|, R) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^3k' e^{-i\vec{k}\cdot\vec{y}} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{y}'} \delta_{Dirac}(\vec{k} - \vec{k}') P(k, z) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k P(k, z) \int d^3y \tilde{W}(|\vec{y} - \vec{x}|, R) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{y}} \int d^3y' \tilde{W}(|\vec{y}' - \vec{x}|, R) e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}'} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k P(k, z) \int d^3y \tilde{W}(|\vec{y} - \vec{x}|, R) e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{y}-\vec{x})} \int d^3y' \tilde{W}(|\vec{y}' - \vec{x}|, R) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{y}'-\vec{x})} \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(k, z) |\tilde{W}(k, R)|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 P(k, z) |\tilde{W}(k, R)|^2 dk,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

de modo que a probabilidade de se obter um valor de  $\delta(\vec{x}, R, z)$  entre  $\delta$  e  $\delta + d\delta$  é dada pela função distribuição de probabilidade Gaussiana

$$p(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(R, z)}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2(R, z)}\right). \tag{2.13}$$

Uma escolha comum para a função janela é uma região de volume esférico de raio

$R$  no espaço real, tal

$$\tilde{W}_{TH}(x, R) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3}, & \text{se } x \leq R \\ 0, & \text{se } x > R \end{cases}, \quad (2.14)$$

conhecida como função janela do tipo cartola (em inglês, *top-hat window function*), conforme apresentado na Figura 4. No espaço de Fourier, essa função janela do tipo cartola é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{TH}(k, R) &= \int \tilde{W}_{TH}(x, R) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{x} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \tilde{W}_{TH}(x, R) e^{ikx\cos\theta} x^2 \sin\theta dx d\theta d\phi \\ &= \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R e^{ikx\cos\theta} x^2 \sin\theta dx d\theta d\phi \\ &= \frac{3}{2R^3} \int_0^\pi \int_0^R e^{ikx\cos\theta} x^2 \sin\theta dx d\theta \\ &= \frac{3}{R^3} \int_0^R j_0(kx) x^2 dx \\ &= \frac{3}{kR^3} \int_0^R \text{sen}(kx) x dx \\ &= \frac{3}{kR^3} \left( \frac{\text{sen}(kR) - (kR)\cos(kR)}{k^2} \right) \\ &= \frac{3}{kR} \left( \frac{\text{sen}(kR) - (kR)\cos(kR)}{(kR)^2} \right) \\ &= \frac{3}{kR} j_1(kR), \end{aligned} \quad (2.15)$$

em que  $j_1(kr)$  é a função esférica de Bessel de primeira espécie e ordem um.

## 2.3 Crescimento Não-Linear das Perturbações (Modelo de Colapso Esférico Top-hat)

A estrutura cósmica atual resulta de todo um processo de amplificação das flutuações (ou perturbações) iniciais. Existem diferentes teorias para descrever a evolução do contraste de densidade em diferentes regimes. Para  $|\delta| \ll 1$  tem-se o regime de crescimento linear e para  $|\delta| \gg 1$  tem-se o regime de crescimento não-linear.

Para explicar as estruturas que existem atualmente, como galáxias e aglomerados de galáxias, a teoria de crescimento não-linear das perturbações cosmológicas é necessária, já que o contraste de densidade de matéria nessas estruturas é muito maior que 1.

Nessa seção, o modelo de colapso esférico *top-hat* será apresentado, seguindo as descrições de (PADMANABHAN, 1993) (cap. 8) e (SUTO et al., 2016) (sec. 2). Nesse modelo, será considerada a evolução de uma perturbação esfericamente simétrica de densidade constante e igual a  $\bar{\rho}(1 + \delta)$  dentro de um raio  $R$ , que pode, então, ser descrita pelo

perfil de densidade

$$\rho(r) = \begin{cases} \bar{\rho}(1 + \delta), & \text{para } r \leq R \\ 0, & \text{para } r > R \end{cases} \quad (2.16)$$

onde  $\bar{\rho}$  é a densidade média do universo e  $\delta (> 0)$  é contraste de densidade da perturbação.

Vamos considerar, ainda, que o universo é um universo Einstein-de Sitter, ou seja, um universo plano ( $\kappa = 0$ ) e formado apenas por matéria ( $\Omega_m = 1$ ), de modo que a densidade média do universo é a densidade de matéria, i.e.  $\bar{\rho} = \rho_m$ . Essa suposição é uma boa aproximação para descrever a distribuição de matéria em uma região onde um halo de matéria escura (ver seção 3.1) se encontra no nosso universo.

A evolução temporal do raio  $R$  da perturbação é descrita pela expressão

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2}, \quad (2.17)$$

assumindo (auto)gravitação Newtoniana. Integrando em relação ao tempo  $t$ , tem-se

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{MG}{R} = E, \quad (2.18)$$

cuja solução, para  $E < 0$ , é dada na forma paramétrica

$$R = A(1 - \cos\theta) \quad (2.19)$$

e

$$t + T = B(\theta - \sin\theta), \quad (2.20)$$

onde as constantes  $A$  e  $B$  estão relacionadas por

$$\frac{A^3}{B^2} = GM \quad (2.21)$$

e a constante  $T$  permite definir as condições iniciais.

A medida que  $\theta \rightarrow \pi$ , a perturbação esférica se expande como todo o universo, até que o raio  $R$  atinge o seu valor máximo e depois começa a diminuir (ver Figura 5). É comum normalizar  $t$  e  $R$  pelos valores que assumem quando o raio atinge esse valor máximo, no período do *turn-around*,  $t_{ta} = t(\theta = \pi) = \pi B$  e  $R_{ta} = R(\theta = \pi) = 2A$ , de forma que as eqs. (2.19), (2.20) e (2.21) podem ser reescritas

$$R = \frac{R_{ta}}{2}(1 - \cos\theta), \quad (2.22)$$

$$t = \frac{t_{ta}}{\pi}(\theta - \sin\theta), \quad (2.23)$$

e

$$\frac{R_{ta}^3 \pi^2}{t_{ta}^2} = GM. \quad (2.24)$$

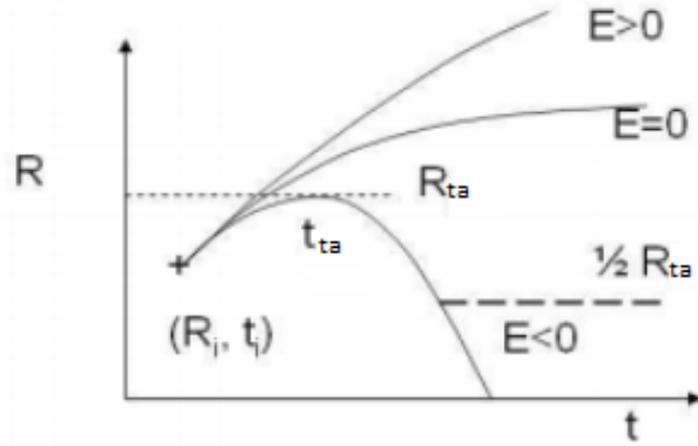


Figura 5 – Evolução de uma perturbação esférica *top-hat* em um universo Einstein-de Sitter ( $\Omega_m = 1$ ). Para  $E < 0$  (ver eq. 2.18) a perturbação esférica atinge um raio máximo  $R_{ta}$  em um certo instante  $t_{ta}$ , depois colapsa e sofre virialização. A virialização ocorre quando  $R = \frac{1}{2}R_{ta}$ . Imagem adaptada de (NORMAN, 2005).

Retornando à eq. (2.16), o termo entre parêntesis,  $(1 + \delta)$ , é definido como sobre-densidade  $\Delta$ , tal

$$\Delta = (1 + \delta) = \frac{\rho}{\bar{\rho}}, \quad (2.25)$$

em que

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad (2.26)$$

é a densidade dentro da esfera de raio  $R$  e massa total  $M$  e

$$\bar{\rho} = \rho_m = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{1}{6\pi G t^2} \quad (2.27)$$

é a densidade do universo, já que para um universo Einstein-de Sitter  $H = \frac{2}{3}t^{-1}$ .

Substituindo as eqs. (2.26) e (2.27) em (2.25), tem-se

$$\Delta = \frac{9}{2} \frac{t^2}{R^3} GM, \quad (2.28)$$

em que as eqs. (2.22), (2.23) e (2.24) podem ser inseridas de maneira que

$$\Delta = \frac{9(\theta - \text{sen}\theta)^2}{2(1 - \text{cos}\theta)^3}. \quad (2.29)$$

A medida que  $\theta \rightarrow 2\pi$ , tem-se o colapso e a virialização da perturbação (Apêndice A), tal que  $t_{vir} = t_{col} = t(\theta = 2\pi) = 2t_{ta}$  e  $R_{vir} = R(\theta = 2\pi) \rightarrow 0$ . Entretanto, a sobre-densidade  $\Delta_{vir} = \Delta(\theta = 2\pi)$  diverge.

Essa indefinição em  $\Delta_{vir}$  pode ser superada utilizando a conservação da energia,

$$\bar{U}_{ta} = \bar{T}_{vir} + \bar{U}_{vir}, \quad (2.30)$$

já que a energia cinética no *turn-around*  $\bar{T}_{ta}$  é igual a zero, e o teorema do virial (ver Apêndice A),

$$\bar{T}_{vir} = -\frac{1}{2}\bar{U}_{vir}, \quad (2.31)$$

de forma que

$$\bar{U}_{ta} = \frac{1}{2}\bar{U}_{vir}. \quad (2.32)$$

Como a energia potencial é proporcional a  $r^{-1}$ , tem-se que  $R_{vir} = \frac{1}{2}R_{ta}$ , de modo que, substituindo juntamente com  $t_{vir} = 2t_{ta}$  e a eq. (2.24) em (2.28), chega-se a

$$\Delta_{vir,EdS} = 18\pi^2 \approx 178, \quad (2.33)$$

tal que o contraste de densidade crítico para colapso (virialização) de uma perturbação esférica no regime não-linear em um universo Einstein-de Sitter é dado por

$$\delta_{c,EdS}^{n\tilde{a}o-linear} = \delta(t_{vir}) = \Delta(t_{vir}) - 1 \approx 177. \quad (2.34)$$

Para outros modelos de universo diferentes do Einstein-de Sitter, tem-se diferentes expressões para o cálculo da sobredensidade do virial. Para  $\Omega_{\kappa,0} = 0$ ,

$$\Delta_{vir,(\Omega_{\kappa,0}=0)}(z) = 18\pi^2 + 82x - 39x^2, \quad (2.35)$$

e para  $\Omega_{\Lambda,0} = 0$ ,

$$\Delta_{vir,(\Omega_{\Lambda,0}=0)}(z) = 18\pi^2 + 60x - 32x^2, \quad (2.36)$$

em que  $x = \Omega_m(z) - 1$ , conforme (BRYAN; NORMAN, 1998) (sec. 2.1). Para o modelo de concordância  $\Lambda$ CDM ( $\Omega_{m,0} \approx 0,3$  e  $\Omega_{\Lambda,0} \approx 0,7$ ), tem-se

$$\Delta_{vir,(\Omega_{m,0}=0,3;\Omega_{\Lambda,0}=0,7)}(z=0) \approx 358, \quad (2.37)$$

conforme (PERCIVAL, 2005) (sec. 8).

## 2.4 Contraste de Densidade Crítico para Colapso no Regime Linear

A evolução linear do contraste de densidade pode ser recuperada no limite em que  $t$  é pequeno (equivalente a  $\theta$  pequeno). Expandindo em séries de Taylor as eqs. (2.22), (2.23) e (2.29) para  $\theta \ll 1$ , tem-se

$$r = \frac{r_{ta}}{4}\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4), \quad (2.38)$$

$$t = \frac{t_{ta}}{6\pi}\theta^3 + \mathcal{O}(\theta^5) \quad (2.39)$$

e

$$\Delta = 1 + \frac{3}{20}\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4), \quad (2.40)$$

de modo que

$$\delta = \Delta - 1 = \frac{3}{20}\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4), \quad (2.41)$$

ou ainda, substituindo a eq. (2.39) na eq. (2.41),

$$\delta(t) \approx \frac{3}{20} \left( 6\pi \frac{t}{t_{ta}} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (2.42)$$

Logo, no regime linear, as perturbações evoluem tal  $\delta \propto t^{\frac{2}{3}}$ .

Para  $t_{vir} = 2t_{ta}$ , tem-se o contraste de densidade crítico para colapso no regime linear (em inglês, *critical linear overdensity of collapse* ou *linear overdensity threshold for collapse*) em um universo Einstein-de Sitter

$$\delta_{c,EdS}^{linear} = \frac{3}{5} \left( \frac{3\pi}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 1,686. \quad (2.43)$$

Para modelos de universo diferentes do Einstein-de Sitter (que, lembrando, é plano e não possui energia escura), tem-se pequenas correções (ver deduções em (MO; van den BOSCH; WHITE, 2010) (sec. 5.1)). Para universos com curvatura ( $\kappa \neq 0$ ) e sem energia escura ( $\Lambda = 0$ ),

$$\delta_{c,(\kappa \neq 0, \Lambda = 0)}^{linear} = \delta_{c,EdS}^{linear} [\Omega_m(t_{vir})]^{0,0185}. \quad (2.44)$$

Já para universos planos ( $\kappa = 0$ ) e com energia escura ( $\Lambda > 0$ ),

$$\delta_{c,(\kappa = 0, \Lambda > 0)}^{linear} = \delta_{c,EdS}^{linear} [\Omega_m(t_{vir})]^{0,0055}. \quad (2.45)$$

De qualquer forma, ambas correções dependem fracamente de  $\Omega_m(t_{vir})$ , tal que a eq. (2.43) é válida como boa aproximação para diferentes modelos cosmológicos em diferentes *redshifts*, inclusive para o modelo de concordância  $\Lambda$ CDM ( $\Omega_{m,0} \approx 0,3$  e  $\Omega_{\Lambda,0} \approx 0,7$ ), para o qual, em  $z = 0$ ,

$$\delta_{c,(\Omega_{m,0}=0,3;\Omega_{\Lambda,0}=0,7)}^{linear}(z=0) \approx 0,994\delta_{c,EdS} \approx 1,675, \quad (2.46)$$

conforme (PERCIVAL, 2005) (sec. 5).

## 2.5 Altura de Pico e Massa Característica

Nessa seção, os conceitos de altura de pico (em inglês, *peak height*) e massa característica (em inglês, *characteristic mass*) serão abordados baseando-se em (GAO et al., 2008) (sec. 3.2), (KRAVTSOV; BORGANI, 2012) (sec. 3.2.2) e (DIEMER, 2018) (sec. 3.1).

Conforme visto na seção 2.2, já que foi assumida uma distribuição Gaussiana para o contraste de densidade de matéria  $\delta$ , a importância estatística de um pico no campo de densidade de matéria pode ser quantificada pela razão  $\delta/\sigma$ , em que  $\sigma$  é a variância da

distribuição. Assim, para uma dada escala de massa  $M$ , que se relaciona com a escala  $R$  por

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho_m(z=0) R^3, \quad (2.47)$$

a altura de pico é definida

$$\nu(M, z) \equiv \frac{\delta_c(z)}{\sigma(M, z)}, \quad (2.48)$$

em que  $\delta_c(z)$  é o contraste de densidade crítico para colapso no regime linear em um certo *redshift*  $z$  (ver sec. 2.4) e  $\sigma(M, z)$  é a variância do contraste de densidade de matéria linear na escala  $M$  e *redshift*  $z$ . Note que além da dependência explícita com  $M$  e  $z$ ,  $\nu(M, z)$  depende do modelo cosmológico e das condições iniciais.

A partir da altura de pico, define-se a massa característica  $M_*(z)$  por  $\nu(M_*, z) = 1$  ou, equivalentemente,  $\sigma(M_*, z) = \delta_c(z)$ . Essa definição proporciona tanto uma forma de ajustar dimensões físicas em simulações quanto de comparar o tamanho de halos (ver sec. 3.1) entre simulações em que foram assumidos diferentes modelos cosmológicos (ver (NAVARRO; FRENK; WHITE, 1997)).

Uma vez que  $\sigma(M, z)$  diminui rapidamente tanto com o aumento de  $M$  quanto com o de  $z$ , enquanto  $\delta_c(z)$  possui uma dependência fraca com  $z$ , quanto maior o valor da altura de pico associada a um halo, mais raro ele é. Dessa forma,  $\nu(M, z) \gg 1$  corresponde aos halos mais raros, de massa  $M \gg M_*$ , que se encontram associados aos maiores aglomerados de galáxias.

## 3 Aglomerados de Galáxias e Halos de Matéria Escura

Nesse capítulo, será apresentada brevemente a história da formação dos grandes halos de matéria escura e como eles se conectam aos aglomerados de galáxias. Serão apresentadas, ainda, algumas características desses halos e como se convencionou descrevê-los. Essa revisão é baseada principalmente nos trabalhos de (ADHIKARI, 2018) e (SCHNEIDER, 2006) (caps. 6 e 7).

### 3.1 Conexão entre Halos e Aglomerados

Apenas uma pequena parcela ( $\sim 5\%$ ) de todo o conteúdo material do universo é matéria bariônica<sup>1</sup>, isto é, prótons, nêutrons, elétrons etc, que compõem a matéria visível. Todo o resto é formado por um outro tipo de matéria que só interage gravitacionalmente (ou interage muito fracamente com os fótons), denominada matéria escura.

A matéria escura encontra-se basicamente agrupada na forma de halos, amontoados que se mantêm unidos por interações gravitacionais. Esses halos foram se formando, ajuntando e interagindo uns com os outros ao longo da história da evolução do universo, de forma que apresentam diferentes tamanhos e formas, além de subestruturas.

O Modelo Padrão da Cosmologia Moderna diz que, ao final do período da inflação, época de expansão súbita (quase exponencial) do espaço-tempo, pequenas inhomogeneidades de matéria existiam no universo, ainda não muito grande e cuja densidade de matéria era praticamente homogênea. Essa inhomogeneidades foram amplificadas a medida que o espaço-tempo continuou a se expandir nos períodos posteriores ao da inflação, seguindo o abordado nos Capítulos 1 e 2. Assim, poços gravitacionais foram formados nas regiões de maior densidade, que continuaram a ficar ainda mais densas com o tempo, ao acretar mais e mais matéria, já que a interação gravitacional se dá apenas de forma atrativa. Por outro lado, as regiões de menor densidade também passaram a ficar cada vez menos densas.

Tanto a matéria escura quanto a matéria bariônica sofrem e sofreram esse processo de se aglomerarem. No entanto, como a matéria bariônica interage eletromagneticamente com fótons, ela só passou a se aglomerar bem mais tarde do que a matéria escura, principalmente após o período da recombinação. Dessa forma, a matéria bariônica

---

<sup>1</sup> Apesar de ter esse nome, esse termo refere-se à todas as partículas que interagem com a radiação eletromagnética: bárions, léptons etc. O nome é devido ao fato dos léptons possuírem massa muito menor que os bárions.

foi atraída gravitacionalmente pelos poços de potencial gerados pelos "pequenos amonoados" de matéria escura que já haviam se agrupado e, com isso, passam a formar as primeiras estruturas.

Uma vez que a matéria - tanto bariônica quanto escura - entra num desses poços de potencial, ela passa a descrever uma órbita que é muito mais determinada pelas interações gravitacionais dentro do poço do que pela expansão cósmica. Porém, esses dois tipos de matéria se configuram em um halo de formas diferentes. A matéria bariônica pode emitir radiação ao interagir com outras partículas e colidir consigo mesma, o que faz com que ela perca momento angular e caia em direção ao centro do halo, formando galáxias, estrelas e tudo que é visível. Já a matéria escura, por interagir muito fracamente eletromagneticamente, não tem seu momento angular reduzido por efeitos eletromagnéticos e, logo, se estende por distâncias maiores ao redor das galáxias, dos aglomerados de galáxias etc.

Assim, os aglomerados de galáxias surgem como o último estágio da formação hierárquica de estruturas no universo, ou seja, estão associados aos maiores (e mais massivos) halos<sup>2</sup>, que por sua vez se associam aos mais raros picos do contraste de densidade de matéria (ver sec. 2.5). Além disso, como um sistema de partículas no universo orbitando o centro de um poço de potencial passa, após um grande período de tempo, a assumir uma configuração de equilíbrio dinâmico, tal que o sistema passou a satisfazer o Teorema do Virial (ver Apêndice A), tem-se que os aglomerados de galáxias são estruturas próximas do equilíbrio dinâmico.

## 3.2 Sobredensidades Esféricas

Para se definir a massa de um halo, normalmente se define a massa de uma sobredensidade esférica (em inglês, *spherical overdensity* (SO)), i.e. a massa dentro de uma esfera cujo centro coincide com o centro do halo e que engloba uma densidade  $\Delta$  vezes uma certa densidade de referência. A massa  $M_{\Delta}(z)$ , o raio  $r_{\Delta}(z)$  e a densidade  $\rho_{\Delta}(z)$  de uma sobredensidade esférica  $\Delta(z)$  se relacionam, em um certo *redshift*  $z$ , por

$$\frac{4}{3}\pi r_{\Delta}^3(z)\rho_{\Delta}(z) = M_{\Delta}(z), \quad (3.1)$$

$$\rho_{\Delta}(z) = \Delta(z)\rho_{ref}(z) \quad (3.2)$$

e

$$M_{\Delta}(z) = \int_0^{r_{\Delta}(z)} 4\pi\rho(r)r^2dr, \quad (3.3)$$

em que a escolha para densidade de referência  $\rho_{ref}$  é geralmente a densidade média de matéria do universo  $\rho_m$  (conforme eq. (1.36)), a densidade crítica do universo  $\rho_{crit}$

<sup>2</sup> A título de curiosidade, o aglomerado de galáxias mais massivo conhecido até então em *redshift*  $z > 1$  é o aglomerado SPT-CL J2106-5844, de massa  $M_{200c} \approx 1,04 \times 10^{15} M_{\odot}$  (KIM et al., 2019).

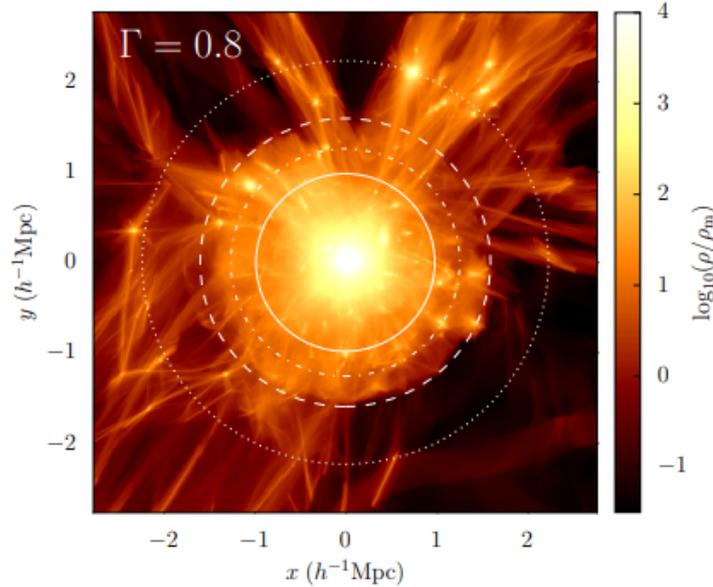


Figura 6 – Densidade projetada de um halo de massa  $M_{vir} = 1,1 \times 10^{14} M_{\odot} h^{-1}$  e baixa taxa de acreção  $\Gamma = 0.8$  (ver subseção 4.1.4) em *redshift*  $z = 0$  para uma cosmologia com  $\Omega_m = 1 - \Omega_{\Lambda} = 0,27$  (ver eq. (2.37)). Os círculos concêntricos em branco indicam os raios  $r_{vir}$  (curva sólida),  $r_{200m}$  (curva ponto-tracejada) e  $r_{splashback}$  (curva tracejada). Imagem adaptada de (MORE; DIEMER; KRAVTSOV, 2015).

(conforme eq. (1.26)) ou a densidade do virial  $\rho_{vir}$  (ver sec. 2.3), que, lembrando, de modo geral variam com o modelo cosmológico e com o *redshift* (DIEMER; MORE; KRAVTSOV, 2013).

O raio  $r_{200m}$ , então, é aquele que define uma esfera, em um certo *redshift*, de densidade média igual a 200 vezes a densidade de matéria do universo ( $\rho_{200m} = 200\rho_m$ ) e o raio  $r_{500c}$  é aquele que define uma esfera de densidade média igual a 500 vezes a densidade crítica do universo ( $\rho_{500c} = 500\rho_{crit}$ ). O raio  $r_{vir}$ , por sua vez, define uma esfera de densidade média igual a densidade do virial  $\rho_{vir}$  (ver Figura 6).

Para  $r_{200m}$  tem-se, em um certo *redshift*  $z$ ,

$$\frac{4}{3}\pi r_{200m}^3(z)\rho_{200m}(z) = M_{200m}(z), \quad (3.4)$$

em que

$$\rho_{200m}(z) = 200\rho_m(z) \quad (3.5)$$

e

$$M_{200m}(z) = \int_0^{r_{200m}(z)} 4\pi\rho(r)r^2 dr. \quad (3.6)$$

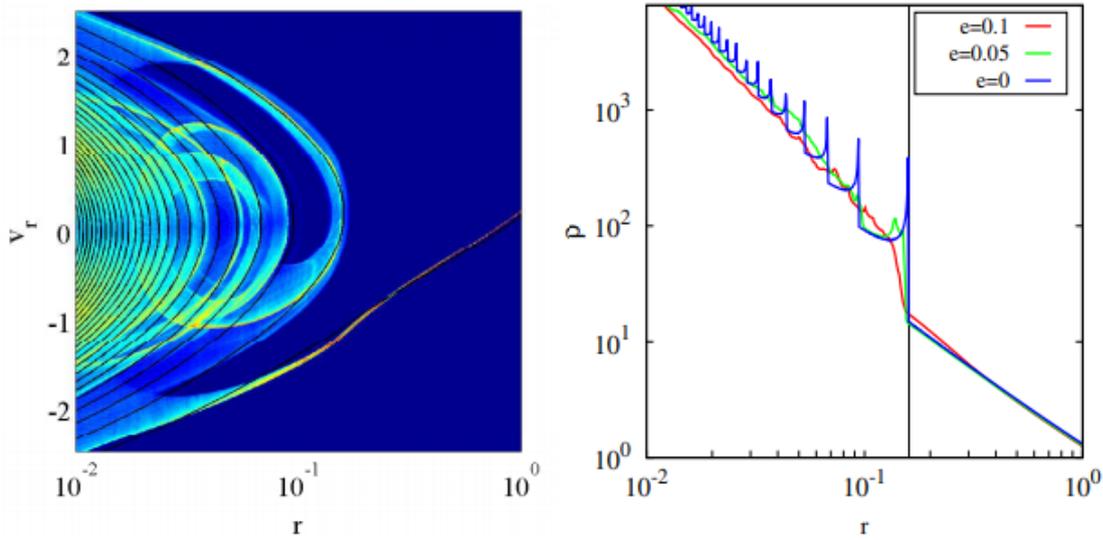


Figura 7 – Diagrama do espaço de fase (à esquerda) para halos resultantes de colapso esférico (curvas em preto) e de colapso com elipticidade  $e = 0.05$  (mapa de cores) e perfis de densidade (à direita) para halos de diferentes elipticidades iniciais com taxa de acreção instantânea  $s = d\log(M)/d\log(a) = 3$ . A linha vertical no gráfico dos perfis de densidade indica o raio *splashback* previsto pelo modelo de colapso esférico para essa taxa de acreção instantânea. Como é possível notar, a localização do raio *splashback* não parece depender da elipticidade inicial. Imagem retirada de (ADHIKARI; DALAL; CHAMBERLAIN, 2014).

### 3.3 Raio *Splashback*

Como discutimos na seção anterior, uma das definições para a fronteira de um halo - ou de um aglomerado - é o raio que define uma esfera cuja densidade de matéria é aproximadamente 200 vezes a densidade de matéria média do universo. Essa definição vem do modelo de colapso esférico *top-hat*, conforme exposto na seção 2.3.

Essa definição convencional, entretanto, não se configura como uma fronteira física para o halo, já que há evidências de que alguns efeitos dinâmicos persistem fora dela. Vale lembrar que no modelo de colapso esférico *top-hat* foi assumido que a perturbação era esférica e estava totalmente isolada, porém os halos reais geralmente não são esféricos - i.e. apresentam triaxialidade - e aumentam de tamanho ao acretarem mais matéria e até ao se fundirem com outros halos.

Existe uma outra definição para a fronteira de um halo, relacionada à dinâmica das partículas que o compõe, que é a distância na qual a matéria mais recentemente acretada atinge o ponto mais distante antes de passar a orbitar e cair em direção ao centro do halo. Este é o denominado raio *splashback*.

Quando as órbitas de diferentes partículas de matéria escura se encontram em uma certa região, a velocidade delas em relação ao centro do halo - i.e. a velocidade

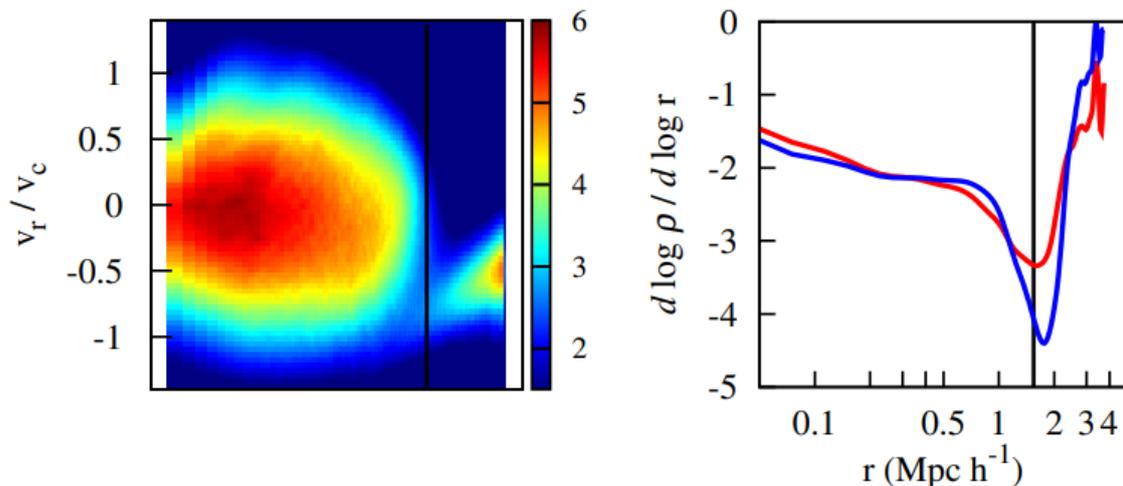


Figura 8 – Diagrama do espaço de fase (à esquerda) e derivadas logarítmicas do perfil de densidade (à direita) para uma coleção de halos de massa  $M_{vir} = 1 \sim 4 \times 10^{14} M_{\odot} h^{-1}$  identificados na Simulação MultiDark. No diagrama, a barra de cor mostra o número (médio) de partículas em cada pixel do espaço de fase. No gráfico das derivadas logarítmicas, a curva em vermelho é dada por todas as partículas, enquanto a curva em azul é dada somente pelas partículas com  $|v_r| < 0,4v_c$ . A linha vertical indica o raio *splashback*. Imagem retirada de (ADHIKARI; DALAL; CHAMBERLAIN, 2014).

radial  $v_r$  - tende a zero, o que faz com que elas fiquem mais tempo nessa região, que normalmente é estreita radialmente. Como consequência, a densidade do halo aumenta bruscamente em localidades assim, formando as chamadas cáusticas. O raio *splashback*, portanto, corresponde a localização da cáustica mais externa, conforme Figura 7.

Adhikari, Dalal & Chamberlain (ADHIKARI; DALAL; CHAMBERLAIN, 2014), ao comparar o diagrama do espaço de fase (tomado como uma média sobre uma coleção de halos) com a respectiva curva da derivada logarítmica do perfil de densidade, conforme Figura 8, observaram que o raio para o qual a derivada logarítmica é mínima é o que separa a região das partículas que estão em órbita da região de acreção, ou seja, é o raio *splashback*. Na mesma época, Diemer & Kravtsov (DIEMER; KRAVTSOV, 2014) observaram que a localização do raio *splashback* também depende fortemente da taxa de acreção de massa, i.e. do quão rápido o halo cresce em massa.

Como é possível notar ao se comparar as Figuras 7 e 8, ao se tomar a média de uma coleção de halos, as cáusticas internas desaparecem.



## 4 Perfis de Densidade de Matéria de Halos de Matéria Escura

Nas últimas décadas, diferentes simulações de N-corpos do colapso gravitacional da matéria escura foram realizadas, buscando por um perfil de densidade de matéria universal para os halos de matéria escura. Como resultado, diferentes perfis esfericamente simétricos existentes na literatura, como os modelos Hernquist (HERNQUIST, 1990), NFW (NAVARRO; FRENK; WHITE, 1997), Einasto (EINASTO, 1965) e DK14 (DIEMER; KRAVTSOV, 2014), apresentaram-se como bons candidatos, em diferentes simulações, para descrever a distribuição de matéria de halos isolados de matéria escura. Nessa capítulo serão apresentados esses diferentes modelos de perfis de densidade citados.

O foco principal da maioria desses estudos e simulações foi na região mais interna dos halos, de forma que, excetuando-se o perfil DK14 que será apresentado por último, os outros modelos não apresentam-se como boas descrições para grandes distâncias do centro. Uma forma de tentar tornar esses outros modelos mais realistas para grandes raios é escrever o perfil de densidade total do halo como a soma de um perfil de densidade interno  $\rho_{\text{int}}(r)$  e um externo  $\rho_{\text{ext}}(r)$ , tal que

$$\rho_{\text{tot}}(r) = \rho_{\text{int}}(r) + \rho_{\text{ext}}(r), \quad (4.1)$$

onde  $r$  é a distância ao centro do halo. A derivada logarítmica desse novo perfil é

$$\frac{d\ln(\rho_{\text{tot}})}{d\ln(r)} = \frac{r}{\rho_{\text{tot}}} \left[ \frac{d\rho_{\text{int}}}{dr} + \frac{d\rho_{\text{ext}}}{dr} \right]. \quad (4.2)$$

Existem também diferentes modelagens para o perfil externo. Algumas delas serão apresentadas ao final deste capítulo.

### 4.1 Perfil Interno

#### 4.1.1 Perfil Hernquist

O perfil Hernquist (HERNQUIST, 1990) é um modelo proposto para descrever a distribuição de matéria em galáxias elípticas e bojos de galáxias. Uma de suas particularidades é que pode ser usado para calcular propriedades observáveis dessas galáxias e estruturas, como a dispersão de velocidades e o brilho superficial projetado, de forma analítica e utilizando funções elementares.

Esse perfil é expresso matematicamente por

$$\rho_{\text{HER}}(r) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s}\right) \left(1 + \left(\frac{r}{r_s}\right)\right)^3}, \quad (4.3)$$

em que  $r_s$  é o raio de escala e  $\rho_s$  é a densidade característica, de forma que é determinado por esses dois parâmetros apenas.

Dubinski & Carlberg (DUBINSKI; CARLBERG, 1991), utilizando simulações de N-corpos para o colapso gravitacional individual de halos - apenas um halo por caixa de simulação por vez - de matéria escura fria, chegaram ao resultado de que a distribuição de densidade proposta por Hernquist descreve bem o perfil de densidade de halos até aproximadamente  $r \approx 2r_s$ . Isso, para halos na escala de galáxias. Além disso, observaram que essa distribuição de densidade também implica em um perfil de velocidade circular de halos que concorda, até um raio de 30 kpc, com a inferida contribuição desses halos nas curvas de rotação de galáxias espirais, como a NGC 3198.

Tomando a derivada em relação ao raio  $r$  da eq. (4.3), tem-se

$$\frac{d}{dr}\rho_{HER}(r) = -\rho_{HER} \frac{\frac{1}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right) + 3 \frac{r}{r_s^2}}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)}, \quad (4.4)$$

de forma que a derivada logarítmica do perfil é dada por

$$\frac{d\ln(\rho_{HER})}{d\ln(r)} = - \left[ 1 + \frac{3 \frac{r}{r_s}}{\left(1 + \frac{r}{r_s}\right)} \right], \quad (4.5)$$

ou seja, para  $r \ll r_s$  assume o valor  $-1$  (i.e.,  $\rho(r) \propto r^{-1}$ ) e para  $r \gg r_s$  assume o valor  $-4$  (i.e.,  $\rho(r) \propto r^{-4}$ ).

Utilizando a definição da eq. (3.3) para o perfil Hernquist, a massa de uma dada sobredensidade é

$$M_{\Delta} = \int_0^{r_{\Delta}} 4\pi \left[ \frac{\rho_s}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^3} \right] r^2 dr \quad (4.6)$$

tal que realizando a substituição  $u = 1 + r/r_s$ ,  $du = dr/r_s$ , e definindo o parâmetro de concentração  $c_{\Delta} = r_{\Delta}/r_s$ , chega-se a

$$M_{\Delta} = 2\pi\rho_s r_s^3 \frac{c_{\Delta}^2}{(1 + c_{\Delta})^2} \quad (4.7)$$

Combinando as eqs. (3.1) e (4.7), tem-se

$$\rho_s = \frac{2}{3}\rho_{\Delta} c_{\Delta} (1 + c_{\Delta})^2, \quad (4.8)$$

de modo que o parâmetro densidade característica  $\rho_s$  pode ser obtido a partir de  $c_{\Delta}$  e de  $\rho_{\Delta}$ , e o parâmetro raio de escala  $r_s$ , a partir de  $c_{\Delta}$  e de  $r_{\Delta}$ .

#### 4.1.2 Perfil NFW

A partir de simulações de N-corpos posteriores a de Dubinski & Carlberg (DUBINSKI; CARLBERG, 1991), Navarro, Frenk & White (NAVARRO; FRENK; WHITE,

1997) encontraram que os perfis de densidade de halos de matéria escura fria em equilíbrio resultantes da formação hierárquica de estruturas<sup>1</sup> têm aproximadamente a mesma forma, independentemente da massa do halo, dos valores dos parâmetros cosmológicos e do espectro de potência das flutuações iniciais. Isso, para halos que vão desde a escala de galáxias anãs até a de ricos aglomerados de galáxias. Para explicar esse padrão, propuseram que as fusões e colisões que ocorrem durante a formação de um halo parecem atuar de forma a produzir uma configuração de equilíbrio que não depende das condições iniciais.

Esse perfil de densidade, denominado perfil NFW, é dado por

$$\rho_{NFW}(r) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s}\right) \left(1 + \left(\frac{r}{r_s}\right)\right)^2}, \quad (4.9)$$

em que  $r_s$  é o raio de escala e  $\rho_s$  é a densidade característica. Nesse modelo, assim como no modelo de Hernquist, o perfil de um halo em equilíbrio pode ser descrito por apenas dois parâmetros,  $r_s$  e  $\rho_s$ .

Tomando a derivada da eq. (4.9) em relação a  $r$ , tem-se

$$\frac{d}{dr}\rho_{NFW}(r) = -\rho_{NFW} \frac{\frac{1}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right) + 2\frac{r}{r_s^2}}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)}, \quad (4.10)$$

de modo que a derivada logarítmica do perfil é dada por

$$\frac{d\ln(\rho_{NFW})}{d\ln(r)} = - \left[ 1 + \frac{2\frac{r}{r_s}}{\left(1 + \frac{r}{r_s}\right)} \right], \quad (4.11)$$

que para  $r \ll r_s$  assume o valor  $-1$  ( $\rho \propto r^{-1}$ ) e para  $r \gg r_s$  assume o valor  $-3$  ( $\rho \propto r^{-3}$ ), tal que o perfil NFW difere do perfil Hernquist no seu comportamento assintótico em  $r \gg r_s$  (ver primeiro gráfico à direita da Figura 16).

De acordo com a definição da eq. (3.3), para o perfil NFW a massa de uma dada sobredensidade é

$$M_\Delta = \int_0^{r_\Delta} 4\pi \left[ \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s}\right) \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2} \right] r^2 dr, \quad (4.12)$$

tal que realizando a substituição  $u = 1 + r/r_s$ ,  $du = dr/r_s$ , e definindo o parâmetro de concentração  $c_\Delta = r_\Delta/r_s$ , chega-se a

$$M_\Delta = 4\pi\rho_s r_s^3 \left[ \ln(1 + c_\Delta) - \frac{c_\Delta}{1 + c_\Delta} \right]. \quad (4.13)$$

Utilizando as eqs. (3.1) e (4.13), tem-se

$$\rho_s = \frac{1}{3}\rho_\Delta \frac{c_\Delta^3}{\ln(1 + c_\Delta) - \frac{c_\Delta}{1 + c_\Delta}}, \quad (4.14)$$

<sup>1</sup> O processo denominado formação hierárquica de estruturas é aquele no qual as estruturas maiores são formadas a partir de fusões de estruturas menores. Dessa forma, os maiores objetos existentes são normalmente mais recentes e resultam de objetos menores, que foram formados anteriormente.

de modo que, novamente, o parâmetro  $\rho_s$  pode ser obtido a partir de  $c_\Delta$  e de  $\rho_\Delta$ , e o parâmetro  $r_s$  a partir de  $r_\Delta$  e  $c_\Delta$ .

Dessa forma, dada a massa e a densidade de uma sobredensidade, i.e.,  $M_\Delta$  e  $\rho_\Delta$ , tem-se o raio  $r_\Delta$  pela eq. (3.1), e, juntamente com o parâmetro de concentração  $c_\Delta$ , tem-se os parâmetros  $r_s$  e  $\rho_s$  necessários para se descrever o perfil.

Vale ressaltar que, como as densidades de referência  $\rho_{ref}$  costumam evoluir com o tempo,  $\rho_\Delta$  e  $M_\Delta$  também se alteram, apesar de fisicamente o halo não estar evoluindo em massa. A esse efeito se dá o nome pseudoevolução de massa de um halo. Para alguns detalhes, ver Apêndice B.

### 4.1.3 Perfil Einasto

O perfil Einasto (EINASTO, 1965) foi proposto para descrever o brilho superficial de galáxias *early-type* e de bojos de galáxias espirais. Simulações de N-corpos posteriores a de Navarro, Frenk & White (NAVARRO; FRENK; WHITE, 1997), como Merritt et. al. (MERRITT et al., 2006) e Hayashi & White (HAYASHI; WHITE, 2008), mostraram que modelos com três parâmetros, como o perfil Einasto, se ajustam melhor que modelos de apenas dois parâmetros, como o perfil NFW, para descrever a distribuição de matéria na região interna dos halos de matéria escura fria. Merritt et. al. (MERRITT et al., 2006) fizeram esse estudo para escalas típicas de galáxias até às escalas de aglomerados de galáxias, assim como Hayashi & White (HAYASHI; WHITE, 2008) consideraram halos com massas no intervalo  $4 \times 10^{10} M_\odot h^{-1} < M_{200m} < 4 \times 10^{14} M_\odot h^{-1}$ .

O perfil Einasto<sup>2</sup> é dado por

$$\rho_{EIN}(r) = \rho_s \exp \left\{ \frac{-2}{\alpha} \left[ \left( \frac{r}{r_s} \right)^\alpha - 1 \right] \right\}, \quad (4.16)$$

em que  $r_s$  é o raio de escala,  $\rho_s = \rho_{EIN}(r_s)$  e  $\alpha$  é um parâmetro adicional.

Tomando a derivada em relação ao raio  $r$ , tem-se

$$\frac{d}{dr} \rho_{EIN}(r) = -\frac{2}{r} \rho_{EIN} \left( \frac{r}{r_s} \right)^\alpha, \quad (4.17)$$

de forma que a derivada logarítmica do perfil é

$$\frac{d \ln(\rho_{EIN})}{d \ln(r)} = -2 \left( \frac{r}{r_s} \right)^\alpha, \quad (4.18)$$

<sup>2</sup> Vale ressaltar que esse perfil é uma versão tridimensional do perfil de Sérsic, escrito usualmente como um perfil de intensidade luminosa, tal

$$I(R) = I_e \exp \left\{ -\beta_n \left[ \left( \frac{R}{R_e} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \right\}, \quad (4.15)$$

em que  $R$  é o raio projetado no plano do céu,  $R_e$  é o raio efetivo,  $I_e = I(R_e)$ ,  $n$  é o índice de Sérsic e  $\beta_n$  é um parâmetro que pode ser escrito em função de  $n$  (RETANA-MONTENEGRO et al., 2012) (sec. 1) (FURLANETTO, 2012) (subsec. 2.3.1)

ou seja, uma lei de potência descrita pelo parâmetro  $\alpha$ . Diferentemente do perfil NFW e do perfil Hernquist, o perfil de Einasto não possui derivada logarítmica assintótica para pequenos raios (ver Figura 16).

A eq. (4.16) pode ser reescrita (ver (RETANA-MONTENEGRO et al., 2012)) como

$$\rho_{EIN}(r) = \rho_0 \exp \left[ - \left( \frac{r}{h} \right)^{\frac{1}{n}} \right], \quad (4.19)$$

realizando as substituições

$$n = \frac{1}{\alpha}, \quad \rho_0 = \rho_s e^{2n}, \quad h = \frac{r_s}{(2n)^n}.$$

A partir da eq. (3.3), para o perfil Einasto (na forma da eq. (4.19)), a massa de uma certa sobredensidade é

$$M_\Delta = \int_0^{r_\Delta} 4\pi \left\{ \rho_0 \exp \left[ - \left( \frac{r}{h} \right)^{\frac{1}{n}} \right] \right\} r^2 dr, \quad (4.20)$$

de modo que realizando a substituição  $u = \left( \frac{r}{h} \right)^{\frac{1}{n}}$ ,  $du = \frac{u^{1-n}}{hn} dr$ , tem-se

$$M_\Delta = 4\pi \rho_0 h^3 n \int_0^{\left( \frac{r_\Delta}{h} \right)^{\frac{1}{n}}} e^{-u} u^{3n-1} du. \quad (4.21)$$

Utilizando a função gamma  $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} dt$  e a função gamma incompleta inferior  $\gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt$ , a eq. (4.21) pode ser escrita

$$M_\Delta = 4\pi \rho_0 h^3 n \Gamma(3n) P \left( 3n, \frac{r_\Delta^{\frac{1}{n}}}{h^{\frac{1}{n}}} \right), \quad (4.22)$$

em que  $P(a, x) = \frac{\gamma(a, x)}{\Gamma(a)}$  (uma função já implementada no pacote SciPy, ver (The SciPy community, 2021)), ou ainda,

$$M_\Delta = 4\pi \rho_s r_s^3 e^{\frac{2}{\alpha}} \alpha^{\frac{3}{\alpha}-1} 2^{-\frac{3}{\alpha}} \Gamma \left( \frac{3}{\alpha} \right) P \left( \frac{3}{\alpha}, \frac{2c_\Delta^\alpha}{\alpha} \right). \quad (4.23)$$

Combinando a eq. (4.23) com a definição da eq. (3.1) e substituindo o parâmetro de concentração  $c_\Delta = r_\Delta/r_s$ , chega-se a

$$\rho_s = \frac{c_\Delta^3 \rho_\Delta \alpha^{1-\frac{3}{\alpha}} 2^{\frac{3}{\alpha}}}{3e^{\frac{2}{\alpha}} \Gamma \left( \frac{3}{\alpha} \right) P \left( \frac{3}{\alpha}, \frac{2c_\Delta^\alpha}{\alpha} \right)} \quad (4.24)$$

tal que o parâmetro  $\rho_s$  pode ser obtido a partir de 3 parâmetros,  $\rho_\Delta$ ,  $c_\Delta$  e  $\alpha$ , enquanto o parâmetro  $r_s$ , novamente, pode ser obtido a partir de  $r_\Delta$  e  $c_\Delta$ .

O parâmetro  $\alpha$ , por sua vez, depende da massa do halo, do *redshift* em que o halo se encontra e também do modelo cosmológico. Apesar dessas dependências com a massa

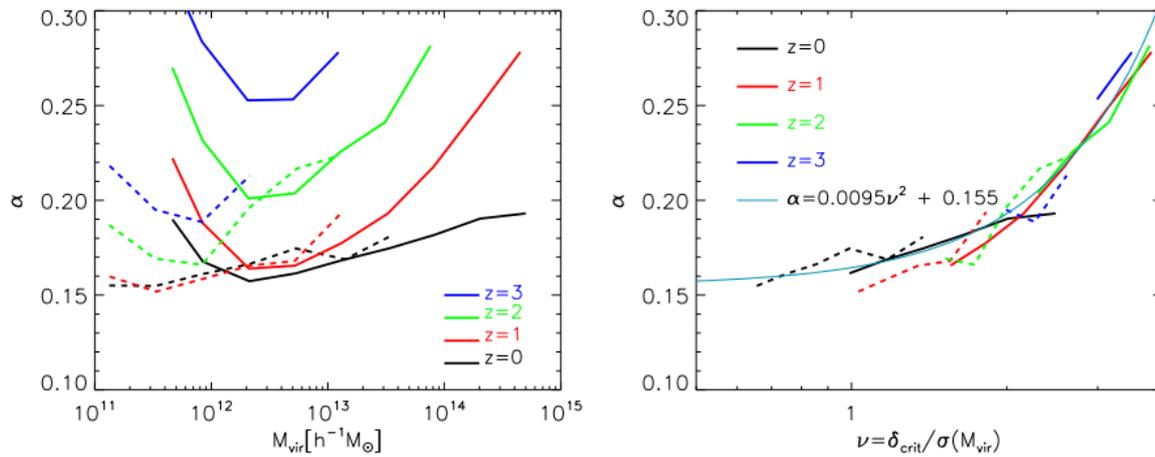


Figura 9 – Dependência do parâmetro  $\alpha$  com a massa  $M_{vir}$  do halo e com o *redshift*  $z$  (à esquerda) e com a altura de pico  $\nu$  (à direita). As curvas sólidas correspondem aos resultados obtidos na Simulação do Milênio (em inglês, *Millenium Simulation*) e as curvas tracejadas aos resultados obtidos em uma outra simulação menor, porém de melhor resolução de massa. Imagem retirada de (GAO et al., 2008).

e o *redshift* não se darem de modo simples, Gao et. al. (GAO et al., 2008) encontraram que  $\alpha$  apresenta, em um universo  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_m = 0,25$  e  $\Omega_{\Lambda} = 0,75$ , uma dependência simples com a altura de pico  $\nu$ , conforme Figura 9, dada por

$$\alpha(\nu) = 0.155 + 0.0095\nu^2. \quad (4.25)$$

#### 4.1.4 Perfil DK14

Em simulações de N-corpos mais recentes, Diemer & Kravtsov (DIEMER; KRAVTSOV, 2014) chegaram a novas conclusões sobre a universalidade dos perfis e sobre a sua forma a distâncias maiores do centro, até  $r \approx 9r_{vir}$ . Observaram que, para  $r \gtrsim 0,5r_{200m}$ , os perfis NFW e Einasto não descrevem bem a distribuição de densidade de matéria dos halos e, além disso, que os halos não possuem perfis universais, uma vez que a distribuição de matéria depende da taxa de acreção de massa. Isso, para halos de massa  $M_{vir} > 1,7 \times 10^{10} M_{\odot} h^{-1}$  em *redshift* entre 0 e 6.

Diferentemente dos perfis apresentados nas subseções anteriores, o perfil DK14 só faz sentido quando combinado a um perfil externo, tal

$$\rho_{DK14}(r) = \rho_{DK14,int}(r) + \rho_{ext}(r), \quad (4.26)$$

cujas partes interna é dada pelo perfil Einasto multiplicado por um termo de transição,

$$\rho_{DK14,int}(r) = \rho_{EIN}(r) f_{trans}(r), \quad (4.27)$$

$$f_{trans}(r) = \left[ 1 + \left( \frac{r}{r_t} \right)^\beta \right]^{-\frac{\gamma}{\beta}}, \quad (4.28)$$

em que o parâmetro  $r_t$  é denominado raio de truncamento. Esse parâmetro  $r_t$  apresenta um bom ajuste ao ser escrito na forma

$$r_t = (1,9 - 0,18\nu)r_{200m}, \quad (4.29)$$

quando fixa-se  $(\beta, \gamma) = (4, 8)$ , para o caso em que não há acreção de matéria, ou na forma

$$r_t = (0.62 + 1.18e^{(-\Gamma/1.5)})r_{200m}, \quad (4.30)$$

quando fixa-se  $(\beta, \gamma) = (6, 4)$ , para o caso em que há acreção de matéria, em que  $\nu$  é a altura de pico (ver seção 2.5) e

$$\Gamma = \frac{\Delta \log(M)}{\Delta \log(a)} \quad (4.31)$$

é a taxa de acreção de matéria.

A derivada linear da parte interna do perfil DK14, eq. (4.27), é dada por

$$\frac{d}{dr} \rho_{DK14,int}(r) = \frac{d\rho_{EIN}}{dr} \left[ 1 + \left( \frac{r}{r_t} \right)^\beta \right]^{-\frac{\gamma}{\beta}} + \rho_{EIN} \left( -\frac{\gamma}{r_t} \right) \left( \frac{r}{r_t} \right)^{\beta-1} \left[ 1 + \left( \frac{r}{r_t} \right)^\beta \right]^{-\frac{\gamma}{\beta}-1}, \quad (4.32)$$

de modo que a derivada logarítmica do perfil total pode ser calculada pela eq. (4.2).

## 4.2 Perfil Externo

O perfil externo é normalmente modelado por um termo de densidade ou por uma combinação de termos de densidade. Alguns desses termos serão abordados em mais detalhes nas subseções adiante.

### 4.2.1 Termo de densidade média de matéria

Ao analisar halos na escala de galáxias em simulações de N-corpos para o modelo padrão  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_{m,0} = 0,3$  e  $\Omega_{\Lambda,0} = 0,7$ , ajustando os perfis de densidade dos halos tal  $\rho(r) = \rho_{EIN}(r) + \rho_m(z)$ , Prada et. al. (PRADA et al., 2006) observaram que o termo  $\rho_m(z)$  pode ser ignorado se deseja-se analisar o perfil de densidade para  $r < r_{vir}$ , mas que ele é importante se deseja-se analisar o perfil para distâncias maiores.

O termo de densidade média de matéria  $\rho_m(z)$  é dado conforme eq.(1.36).

### 4.2.2 Termo de densidade de 2-halo

O termo de densidade de 2-halo captura a contribuição (estatística) de halos vizinhos no perfil de um halo, uma vez que halos tendem a se formar perto de outros halos.

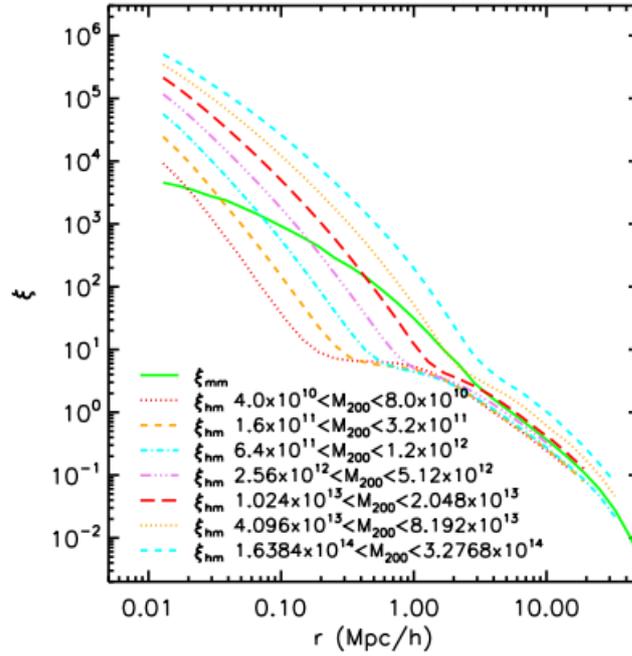


Figura 10 – Funções de correlação cruzada halo-matéria (curvas tracejadas) e função de (auto)correlação matéria-matéria (curva sólida) obtidas na Simulação do Milênio (em inglês, *Millennium Simulation*), em  $z = 0$ . Imagem retirada de (HAYASHI; WHITE, 2008).

Ele é modelado na forma

$$\rho_{2h}(r, z) = \rho_m(z)\xi_{2h}(r, z). \quad (4.33)$$

Essa modelagem vem da caracterização proposta por Hayashi & White (HAYASHI; WHITE, 2008) para a função de correlação cruzada halo-matéria

$$\xi_{hm}(r, z) = \begin{cases} \xi_{1h}(r, z), & \text{para } \xi_{1h} \geq \xi_{2h} \\ \xi_{2h}(r, z), & \text{para } \xi_{1h} < \xi_{2h} \end{cases}, \quad (4.34)$$

em que

$$\xi_{1h}(r, z) = \frac{\rho_{halo}(r, z)}{\rho_m(z)} - 1, \quad (4.35)$$

com  $\rho_{halo}(r, z) = \rho_{int}(r) + \rho_m(z)$  seguindo o ajuste proposto por Prada et. al. (PRADA et al., 2006), é o denominado termo de 1-halo e

$$\xi_{2h}(r, z) = b(\nu)\xi_{mm}(r, z) \quad (4.36)$$

é o denominado termo de 2-halo, dado pela multiplicação do viés de halo (em inglês, *halo bias*)  $b(\nu)$  pela função de correlação matéria-matéria  $\xi_{mm}(r, z)$ <sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Vale ressaltar que também não há consenso sobre qual função de correlação matéria-matéria usar. Apesar de Hayashi & White (HAYASHI; WHITE, 2008) utilizarem a função de correlação linear, considerando o espectro de potência linear na eq.(2.8), Zu et. al. (ZU et al., 2014) já realizaram a mesma modelagem utilizando a função de correlação não-linear.

Como é possível observar na Figura 10, a função de correlação cruzada halo-matéria é definida em duas partes (representadas na eq. (4.34)) e apresenta uma transição acentuada entre elas. Em pequenas escalas, ela é descrita pelo termo de 1-halo, que reflete o perfil de densidade de um halo isolado, enquanto que, em grandes escalas, ela é descrita pelo termo de 2-halo, que segue a função de correlação matéria-matéria multiplicada por um fator constante  $b(\nu)$ .

Existem diferentes modelos para a dependência do viés de halo com a altura de pico (ou com a massa de um halo). Um deles é o de Tinker et. al. (TINKER et al., 2010), dado por

$$b(\nu) = 1 - A \frac{\nu^a}{\nu^a + \delta_c^a} + B\nu^b + C\nu^c, \quad (4.37)$$

com

$$\begin{aligned} A &= 1,0 + 0,24y \exp[-(4/y)^4], & a &= 0,44y - 0,88, \\ B &= 0,183, & b &= 1,5, \\ C &= 0,019 + 0,107y + 0,19 \exp[-(4/y)^4], & c &= 2,4, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$y = \log_{10} \Delta$  (sobredensidade  $\Delta$  para  $\rho_{ref} = \rho_m$ ),  $\nu = \nu(M_{\Delta m}, z)$  e  $\delta_c = 1,686$ . Outros modelos para  $b(\nu)$  estão sumarizados em (DIEMER, 2018) (sec. 3.3).

### 4.2.3 Termo de lei de potências

O termo de lei de potências (em inglês, *power law term*) é uma aproximação útil para descrever o perfil de densidade externo até  $r \approx 9r_{vir}$ . A distâncias maiores do centro, é esperado que o perfil seja proporcional à função de correlação matéria-matéria (ver subseção 4.2.2) e, à distâncias ainda maiores, é esperado que o perfil atinja a densidade média de matéria. Tal como proposto por Diemer & Kravtsov (DIEMER; KRAVTSOV, 2014), tem-se

$$\rho_{PL,DK14}(r) = \rho_m(z) \left[ b_e \left( \frac{r}{r_{pivot}} \right)^{-S_e} + 1 \right], \quad (4.39)$$

dado por uma lei de potências somada a um termo de densidade média de matéria. Vale ressaltar, que observaram que o ajuste desse modelo aos resultados da simulação não era sensível a uma escolha do parâmetro  $r_{pivot}$  no intervalo  $1 \sim 5r_{200m}$ .

Uma variação do termo de lei de potências, conveniente para o ajuste de dados observacionais (veja (BAXTER et al., 2017) e (CHANG et al., 2018)), é dada por

$$\rho_{PL}(r) = \rho_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-S_e}. \quad (4.40)$$

Apesar de possuir três parâmetros ( $\rho_0$ ,  $r_0$  e  $S_e$ ), dois deles ( $r_0$  e  $\rho_0$ ) são completamente interdependentes, de forma que normalmente se fixa  $r_0$  (por ex.,  $r_0 = 1,5h^{-1}\text{Mpc}$ ) e restam apenas dois parâmetros livres. Essa modelagem difere da apresentada na eq. (4.39) por não apresentar um termo de densidade média de matéria  $\rho_m(z)$ .

Uma outra variação do termo de lei de potências é a implementada no pacote Colossus (DIEMER, 2018), expressa por

$$\rho_{P,L,COL}(r) = \rho_m(z) \frac{b_e}{\frac{1}{\rho_{max}} + \left(\frac{r}{r_{pivot}}\right)^{S_e}} \quad (4.41)$$

O parametro  $\rho_{max}$  é introduzido para garantir que esse termo não tenha uma contribuição significativa - e falsa - para pequenos raios. Vale ressaltar que essa modelagem também já foi utilizada para se ajustar dados observacionais (veja (UMETSU; DIEMER, 2017), em que fixaram  $r_{pivot} = 5r_{200m}$  e  $\rho_{max} = 10^3$ ).

## 5 Teoria do Lenteamento Gravitacional

Nas proximidades de objetos astronômicos massivos, a luz percorre geodésicas no espaço-tempo distorcido pelo campo gravitacional, sendo, portanto, desviada. Nessa seção serão discutidos conceitos e equações básicas da Teoria de Lenteamento Gravitacional, que descreve como a trajetória da luz é desviada por um corpo massivo. As principais referências utilizadas para compor essa seção foram (NARAYAN; BARTELMANN, 1996), (SCHNEIDER; KOCHANNEK; WAMBSGANSS, 2006), (FURLANETTO, 2012), (OLIVEIRA, 2017) e (UMETSU, 2020).

### 5.1 Equação da Lente

A princípio, a propagação da luz emitida por uma fonte é afetada por toda a matéria existente entre ela e um observador. Porém, para simplificar, pode-se assumir que o efeito do lenteamento gravitacional ocorre por um único objeto massivo, denominado lente, em uma certa posição entre a fonte e o observador. Se as distâncias de diâmetro angular observador-fonte  $D_F$ , lente-fonte  $D_{LF}$  e observador-lente  $D_L$  são muito maiores que as dimensões da lente, ela pode ser considerada como se estivesse contida em um plano, denominado plano da lente. Essa é a chamada aproximação de lente fina.

A Figura 11 esquematiza essa situação. A fonte, em S, está na posição angular  $\vec{\beta}$ , a uma distância  $\vec{\eta} = D_F \vec{\beta}$  do eixo óptico no plano da fonte. Um raio de luz que vem da fonte tem parâmetro de impacto  $\vec{\xi} = D_L \vec{\theta}$  no plano da lente e é desviado por um ângulo de deflexão  $\hat{\alpha}$ . O Observador, em O, vê a imagem da fonte em I, na posição angular  $\vec{\theta}$ .

Se os ângulos  $\vec{\theta}$ ,  $\vec{\beta}$  e  $\vec{\alpha}$  são pequenos, é possível ver na Figura 11 que vale

$$\vec{\theta} D_F = \vec{\beta} D_F + \vec{\alpha} D_{LF}. \quad (5.1)$$

Definindo-se o ângulo de deflexão reduzido, tal

$$\vec{\alpha} = \frac{D_{LF}}{D_F} \vec{\tilde{\alpha}}, \quad (5.2)$$

a eq. (5.1) pode ser reescrita

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}), \quad (5.3)$$

conhecida como equação da lente, que relaciona a posição angular verdadeira  $\vec{\beta}$  à posição angular aparente  $\vec{\theta}$  da fonte. Quando essa equação apresenta mais de uma solução para um dado  $\vec{\beta}$ , uma fonte nessa posição angular pode ser observada em mais de uma posição angular  $\vec{\theta}$ , i.e., a lente produz múltiplas imagens da fonte.

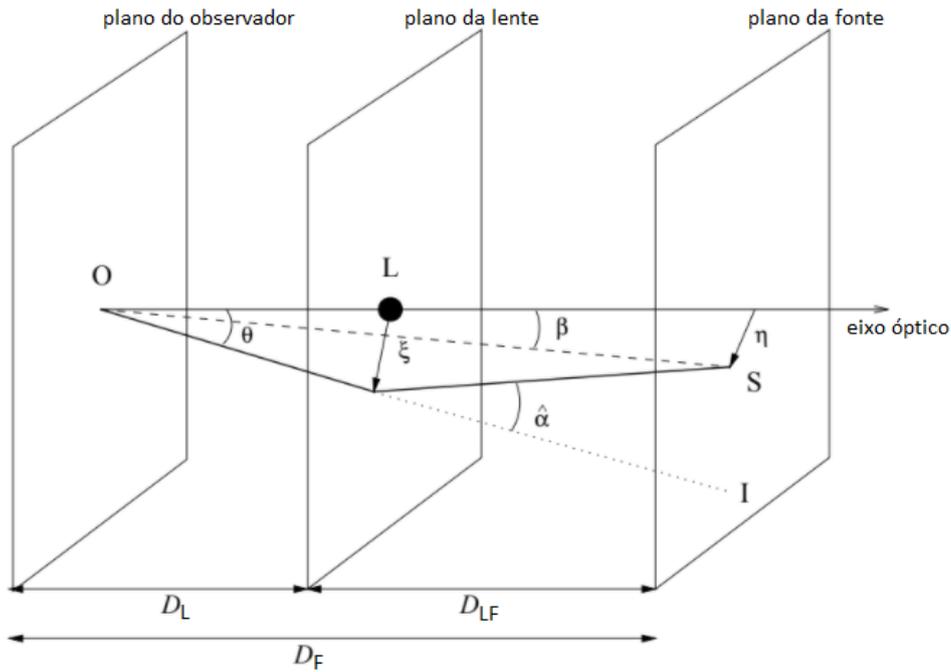


Figura 11 – Configuração geométrica simplificada de um sistema de lente gravitacional. Imagem adaptada de (UMETSU, 2020).

## 5.2 Ângulo de Deflexão

O ângulo de deflexão depende da distribuição de massa da lente e pode ser calculado pela Teoria da Relatividade Geral. Assumindo aproximação de campo fraco (que será apresentada adiante) e que as velocidades relativas da lente, fonte e observador são muito menores que a velocidade da luz, o módulo do ângulo de deflexão é dado por

$$\hat{\alpha}(\xi) = \frac{4GM(\xi)}{c^2\xi}, \quad (5.4)$$

em que  $G$  é a constante gravitacional,  $\xi$  é a distância do centro da lente e  $M(\xi)$  é a massa contida no raio  $\xi$ .

Nessa seção serão seguidos os passos de (UMETSU, 2020) (sec. 2.1) para se obter a eq.(5.4). Uma outra forma de se obter a mesma expressão pode ser encontrada em (CARROLL, 2004) (sec. 7.3).

Assumindo-se, então, que a distribuição de massa é estacionária e isolada e que a deflexão da luz se dá no regime de campo fraco ( $|\Phi_N/c^2| \ll 1$ ), o elemento de linha nesse espaço-tempo assintoticamente plano pode ser escrito

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\Phi_N}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi_N}{c^2}\right) [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2], \quad (5.5)$$

em que  $x^\mu = (ct, x^1, x^2, x^3)$ ,  $\Phi_N$  é o potencial gravitacional Newtoniano e  $c$  é a velocidade

da luz no vácuo. Diante disso, a métrica desse espaço-tempo pode ser escrita pela soma

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(b)} + h_{\mu\nu}, \quad (5.6)$$

em que  $g_{\mu\nu}^{(b)}$  é a métrica de fundo (em inglês, *background metric*) e  $h_{\mu\nu}$  é uma pequena perturbação (tal que  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ), dadas por

$$g_{\mu\nu}^{(b)} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

e

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{2\Phi_N}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\Phi_N}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\Phi_N}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2\Phi_N}{c^2} \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

em que  $\eta_{\mu\nu}$  é métrica de Minkowski.

A métrica inversa  $g^{\mu\nu}$  e a métrica de fundo inversa  $g^{(b)\mu\nu}$  são definidas por  $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu$  e  $g^{(b)\mu\rho}g_{\rho\nu}^{(b)} = \delta_\nu^\mu$ , em que  $\delta_\nu^\mu$  é o delta de Kronecker, de modo que, em primeira ordem<sup>1</sup> de  $h$ ,

$$g^{\mu\nu} = g^{(b)\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (5.9)$$

com

$$h^{\mu\nu} = g^{(b)\mu\rho}g^{(b)\nu\sigma}h_{\rho\sigma}. \quad (5.10)$$

A propagação da luz no espaço-tempo é descrita pelas equações que caracterizam uma geodésica do tipo nulo,

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}k^\nu k^\lambda \quad (5.11)$$

e

$$g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0, \quad (5.12)$$

---

1

$$\begin{aligned} g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} &= (g^{(b)\mu\rho} - h^{\mu\rho})(g_{\rho\nu}^{(b)} + h_{\rho\nu}) \\ &= g^{(b)\mu\rho}g_{\rho\nu}^{(b)} + g^{(b)\mu\rho}h_{\rho\nu} - h^{\mu\rho}g_{\rho\nu}^{(b)} - h^{\mu\rho}h_{\rho\nu} \\ &= \delta_\nu^\mu + g^{(b)\mu\rho}h_{\rho\nu} - h^{\mu\rho}g_{\rho\nu}^{(b)} + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \delta_\nu^\mu + g^{(b)\mu\rho}h_{\rho\nu} - g^{(b)\mu\alpha}g^{(b)\rho\beta}g_{\rho\nu}^{(b)}h_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \delta_\nu^\mu + g^{(b)\mu\rho}h_{\rho\nu} - g^{(b)\mu\alpha}\delta_\nu^\beta h_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \delta_\nu^\mu + g^{(b)\mu\rho}h_{\rho\nu} - g^{(b)\mu\alpha}h_{\alpha\nu} + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \delta_\nu^\mu + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

em que

$$k_{\mu\nu} \equiv \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} \quad (5.13)$$

é o vetor quadrimomento,  $\lambda$  parametriza a trajetória do raio de luz e  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$  é o símbolo de Christoffel de segundo tipo (o mesmo da eq. (1.9)). Note que para a métrica de fundo  $g_{\mu\nu}^{(b)} = \eta_{\mu\nu}$ ,

$$\Gamma^{(b)\mu}_{\alpha\beta} = 0. \quad (5.14)$$

Considerando que o raio de luz se propaga na direção  $x^3$  na métrica de fundo, a trajetória não perturbada do fóton é dada por

$$x^{(b)\mu}(\lambda) = (\lambda, 0, 0, \lambda) \quad (5.15)$$

e o respectivo vetor quadrimomento é

$$k^{(b)\mu} = (1, 0, 0, 1). \quad (5.16)$$

Por sua vez, a trajetória do fóton no espaço-tempo perturbado pode ser dada pela soma

$$x^\mu(\lambda) = x^{(b)\mu}(\lambda) + \delta x^\mu(\lambda), \quad (5.17)$$

em que  $\delta x^\mu(\lambda)$  é o vetor desvio, de forma que

$$k^\mu(\lambda) = k^{(b)\mu}(\lambda) + \delta k^\mu(\lambda). \quad (5.18)$$

Uma vez que a deflexão da trajetória do fóton se dá no regime de campo fraco, as equações que descrevem uma geodésica do tipo nulo podem ser linearizadas<sup>2,3</sup>, tal

$$\frac{d(\delta k^\mu)}{d\lambda} = -2\Gamma^{(b)\mu}_{\nu\lambda} k^{(b)\nu} \delta k^\lambda - \delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda} k^{(b)\nu} k^{(b)\lambda} \quad (5.19)$$

2

$$\begin{aligned} \frac{d(k^\mu)}{d\lambda} &= -(\Gamma^{(b)\mu}_{\nu\lambda} + \delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda})(k^{(b)\mu} + \delta k^\mu)(k^{(b)\nu} + \delta k^\nu) \\ &\approx -(\Gamma^{(b)\mu}_{\nu\lambda} + \delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda})(k^{(b)\mu} k^{(b)\nu} + 2k^{(b)\mu} \delta k^\nu) \\ &\approx -\Gamma^{(b)\mu}_{\nu\lambda} k^{(b)\mu} k^{(b)\nu} - 2\Gamma^{(b)\mu}_{\nu\lambda} k^{(b)\mu} \delta k^\nu - \delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda} k^{(b)\mu} k^{(b)\nu} \end{aligned}$$

$$\text{mas } \frac{d(k^{(b)\mu})}{d\lambda} = -\Gamma^{(b)\mu}_{\nu\lambda} k^{(b)\mu} k^{(b)\nu} \text{ e } \frac{d(k^\mu)}{d\lambda} = \frac{d(k^{(b)\mu})}{d\lambda} + \frac{d(\delta k^\mu)}{d\lambda}, \text{ logo}$$

$$\frac{d(\delta k^\mu)}{d\lambda} = -2\Gamma^{(b)\mu}_{\nu\lambda} k^{(b)\nu} \delta k^\lambda - \delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda} k^{(b)\nu} k^{(b)\lambda}$$

3

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu &= (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(k^{(b)\mu} + \delta k^\mu)(k^{(b)\nu} + \delta k^\nu) \\ &\approx (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(k^{(b)\mu} k^{(b)\nu} + k^{(b)\mu} \delta k^\nu + k^{(b)\nu} \delta k^\mu) \\ &\approx \eta_{\mu\nu} k^{(b)\mu} k^{(b)\nu} + \eta_{\mu\nu} k^{(b)\mu} \delta k^\nu + \eta_{\mu\nu} k^{(b)\nu} \delta k^\mu + h_{\mu\nu} k^{(b)\mu} k^{(b)\nu} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{mas } \eta_{\mu\nu} k^{(b)\mu} k^{(b)\nu} = 0, \text{ logo}$$

$$h_{\mu\nu} k^{(b)\mu} k^{(b)\nu} + 2\eta_{\mu\nu} k^{(b)\mu} \delta k^\nu = 0$$

e

$$h_{\mu\nu}k^{(b)\mu}k^{(b)\nu} + 2g_{\mu\nu}^{(b)}k^{(b)\mu}\delta k^\nu = 0, \quad (5.20)$$

em que

$$\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{(b)\mu\nu}(h_{\nu\alpha,\beta} + h_{\nu\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}) + \mathcal{O}(h^2) \quad (5.21)$$

é símbolo de Christoffel perturbado<sup>4</sup>.

Por simplicidade, pode-se assumir que o ângulo de deflexão está contido no plano  $x^3x^1$  (em que  $x^2 = 0$ ) e pode-se renomear  $(x^1, x^3) = (x^\perp, x^\parallel)$ .

Substituindo a eq. (5.14) na eq. (5.19) e tomando como condição de contorno em  $\lambda \rightarrow -\infty$  que  $\delta k^\mu(-\infty) = 0$ , para  $\mu = 1$  tem-se

$$\delta k^\perp(+\infty) = \delta k^1(+\infty) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\Gamma^1_{\nu\rho} k^{(b)\nu} k^{(b)\rho} d\lambda. \quad (5.22)$$

Perceba, aqui, que o integrando só não vai ser nulo para  $(\nu, \rho) = \{(0, 0), (0, 3), (3, 0), (3, 3)\}$ , devido ao produto  $k^{(b)\nu}k^{(b)\rho}$ . Logo, para prosseguir, somente os seguintes símbolos de Christoffel perturbados são necessários

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}(-h_{00,1}), & \delta\Gamma^1_{03} &= 0, \\ \delta\Gamma^1_{30} &= 0, & \delta\Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2}(-h_{33,1}), \end{aligned}$$

em que

$$h_{00,1} = h_{33,1} = -\frac{2}{c^2} \frac{\partial\Phi_N}{\partial x^\perp}, \quad (5.23)$$

de modo que

$$\delta k^\perp(+\infty) = -\frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\Phi_N}{\partial x^\perp} d\lambda. \quad (5.24)$$

Já para  $\mu = 3$ , tem-se

$$\delta k^\parallel(+\infty) = \delta k^3(+\infty) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\Gamma^3_{\nu\rho} k^{(b)\nu} k^{(b)\rho} d\lambda, \quad (5.25)$$

---

4

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(g^{(b)\mu\nu} - h^{\mu\nu})(g_{\nu\alpha,\beta}^{(b)} + g_{\nu\beta,\alpha}^{(b)} - g_{\alpha\beta,\nu}^{(b)} + h_{\nu\alpha,\beta} + h_{\nu\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}) \\ &= \frac{1}{2}(g^{(b)\mu\nu} - h^{\mu\nu})(g_{\nu\alpha,\beta}^{(b)} + g_{\nu\beta,\alpha}^{(b)} - g_{\alpha\beta,\nu}^{(b)}) + \frac{1}{2}g^{(b)\mu\nu}(h_{\nu\alpha,\beta} + h_{\nu\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \Gamma^{(b)\mu}_{\alpha\beta} + \delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

tal que

$$\Gamma^{(b)\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\nu\alpha,\beta}^{(b)} + g_{\nu\beta,\alpha}^{(b)} - g_{\alpha\beta,\nu}^{(b)})$$

e

$$\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{(b)\mu\nu}(h_{\nu\alpha,\beta} + h_{\nu\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}) + \mathcal{O}(h^2)$$

tal que novamente o integrando só não vai ser nulo para  $(\nu, \rho) = \{(0, 0), (0, 3), (3, 0), (3, 3)\}$ , devido ao produto  $k^{(b)\nu}k^{(b)\rho}$ . Assim, é necessário calcular apenas

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^3_{00} &= \frac{1}{2}(-h_{00,3}), & \delta\Gamma^3_{03} &= \frac{1}{2}(h_{33,0}), \\ \delta\Gamma^3_{30} &= \frac{1}{2}(h_{33,0}), & \delta\Gamma^3_{33} &= \frac{1}{2}(h_{33,3}),\end{aligned}$$

em que

$$h_{00,3} = h_{33,3} \quad (5.26)$$

e

$$h_{33,0} = h_{33,0} = 0, \quad (5.27)$$

de forma que

$$\delta k^{\parallel}(+\infty) = 0. \quad (5.28)$$

O ângulo deflexão  $\hat{\alpha}$ , no limite em que  $\hat{\alpha} \ll 1$ , pode ser, então, calculado por

$$\hat{\alpha} \approx -\frac{k^{\perp}(+\infty)}{k^{\parallel}(+\infty)} = -\left(\frac{0 + \delta k^{\perp}(+\infty)}{1 + 0}\right) \approx \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\Phi_N(x^{\perp}, x^{\parallel})}{\partial x^{\perp}} dx^{\parallel}, \quad (5.29)$$

já que a eq. (5.28) implica em  $\lambda = x^{\parallel}(\lambda) + \mathcal{O}(h)$ . O potencial Newtoniano pode ser escrito

$$\Phi_N(x^{\perp}, x^{\parallel}) = -\frac{GM}{\sqrt{(x^{\perp})^2 + (x^{\parallel})^2}}, \quad (5.30)$$

tal que

$$\frac{\partial\Phi_N}{\partial x^{\perp}} = GM \frac{x^{\perp}}{((x^{\perp})^2 + (x^{\parallel})^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.31)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &\approx \frac{2GM}{c^2} x^{\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{((x^{\perp})^2 + (x^{\parallel})^2)^{\frac{3}{2}}} dx^{\parallel} \\ &\approx \frac{2GM}{c^2} x^{\perp} \left[ \frac{x^{\parallel}}{(x^{\perp})^2 \sqrt{(x^{\perp})^2 + (x^{\parallel})^2}} \right]_{x^{\parallel}=-\infty}^{\infty} \\ &\approx \frac{2GM}{c^2} x^{\perp} \left( \frac{2}{(x^{\perp})^2} \right) \\ &\approx \frac{4GM}{c^2 b},\end{aligned} \quad (5.32)$$

assumindo parâmetro de impacto  $b = x^{\perp}$  e lembrando que no regime de campo fraco ( $|\Phi_N/c^2| \ll 1$ ) o parâmetro de impacto do raio de luz é muito maior que o raio de Schwarzschild, i.e.  $b \gg R_{Sch} = 2GM/c^2$ .

### 5.3 Densidade Superficial de Massa e Convergência

Em notação vetorial, a eq. (5.4) pode ser reescrita

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2\xi', \quad (5.33)$$

em que

$$\Sigma(\vec{\xi}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi_1, \xi_2, r_3) dr_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\sqrt{\xi^2 + r_3^2}) dr_3 \quad (5.34)$$

é a densidade superficial de massa, obtida ao se integrar a densidade volumétrica de massa  $\rho$  ao longo da direção de visada  $\hat{r}_3$ . Essa densidade superficial é também denominada densidade projetada de massa.

Inserindo (5.33) em (5.2) e substituindo o parâmetro de impacto  $\vec{\xi} = D_L \vec{\theta}$ , tem-se o ângulo de deflexão reduzido

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{4G}{c^2} \frac{D_L D_{LF}}{D_F} \int \Sigma(D_L \vec{\theta}') \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2} d^2\theta', \quad (5.35)$$

que também pode ser escrito

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\vec{\theta}') \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2} d^2\theta', \quad (5.36)$$

em que

$$\kappa(\vec{\theta}) = \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_{crit}} \quad (5.37)$$

é a densidade superficial de massa adimensional, também denominada convergência, e

$$\Sigma_{crit} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_F}{D_L D_{LF}} \quad (5.38)$$

é a densidade superficial de massa crítica. Vale ressaltar que, de forma geral,  $D_F \neq D_L + D_{LF}$  (ver eq. (1.56)).

O valor da convergência é utilizado para caracterizar o regime do lenteamento, tal que, para  $\kappa \gtrsim 1$  (equivalente a  $\Sigma \gtrsim \Sigma_{crit}$ ) a distribuição de massa atua como uma lente forte, caso em que a lente pode produzir grandes arcos ou múltiplas imagens de uma mesma fonte.

### 5.4 Potencial da Lente

Retornando à eq. (5.36) e notando que  $\vec{\nabla}_{\theta} \ln|\vec{\theta} - \vec{\theta}'| = \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2}$ , o ângulo de deflexão reduzido pode ser escrito

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \vec{\nabla}_{\theta} \psi(\vec{\theta}), \quad (5.39)$$

com

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\vec{\theta}') \ln|\vec{\theta} - \vec{\theta}'| d^2\theta', \quad (5.40)$$

em que  $\psi(\vec{\theta})$  é o denominado potencial da lente.

Esse potencial  $\psi$  é um potencial gravitacional newtoniano projetado e apropriadamente reescalado da lente, que se relaciona com o potencial gravitacional Newtoniano  $\Phi$  da distribuição de massa da lente por

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \int \Phi(D_L \vec{\theta}, r_3) dr_3. \quad (5.41)$$

O potencial gravitacional Newtoniano, por sua vez, obedece à equação de Poisson

$$\nabla_{\xi}^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (5.42)$$

de forma que o laplaciano do potencial da lente é proporcional à densidade superficial de massa da lente,

$$\nabla_{\theta}^2 \psi(\vec{\theta}) = \frac{2}{c^2} \frac{D_L D_{LS}}{D_S} \int \nabla_{\xi}^2 \Phi dr_3 = \frac{2}{c^2} \frac{D_L D_{LS}}{D_S} 4\pi G \Sigma(\vec{\theta}), \quad (5.43)$$

ou ainda, é o dobro da convergência,

$$\nabla_{\theta}^2 \psi(\vec{\theta}) = 2 \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_{crit}} = 2\kappa(\vec{\theta}). \quad (5.44)$$

## 5.5 Matriz Jacobiana

Se a fonte é bem menor do que a escala angular em que as propriedades da lente variam, o mapeamento da lente pode ser linearizado localmente<sup>5</sup>,

$$\delta\beta_i = \mathcal{A}_{ij} \delta\theta_j, \quad (5.46)$$

de modo que a distorção das imagens pode ser descrita pela matriz Jacobiana

$$\mathcal{A} = \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \psi(\vec{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \begin{pmatrix} 1 - \psi_{,11} & -\psi_{,12} \\ -\psi_{,21} & 1 - \psi_{,22} \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

em que foi utilizada a abreviação  $\psi_{,ij} \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$  e a eq. (5.39).

Da eq. (5.44), tem-se que a convergência pode ser dada pela combinação linear

$$\kappa(\vec{\theta}) = \frac{1}{2}(\psi_{,11} + \psi_{,22}). \quad (5.48)$$

Outras duas combinações importantes de  $\psi_{,ij}$  são

$$\gamma_1(\vec{\theta}) = \frac{1}{2}(\psi_{,11} - \psi_{,22}), \quad \gamma_2(\vec{\theta}) = \psi_{,12} = \psi_{,21}, \quad (5.49)$$

as chamadas componentes do cisalhamento  $\gamma(\vec{\theta}) \equiv \gamma_1(\vec{\theta}) + i\gamma_2(\vec{\theta}) = |\gamma(\vec{\theta})| e^{i(2\phi)}$ , em que  $|\gamma(\vec{\theta})| = \sqrt{\gamma_1^2(\vec{\theta}) + \gamma_2^2(\vec{\theta})}$  é a magnitude e  $\phi$  a orientação.

<sup>5</sup> Se  $\kappa(\vec{\theta})$  e  $\gamma(\vec{\theta})$  não são constantes por toda a imagem da fonte, efeitos de lenteamento de ordem superior (não-linear) ocorrem. Para segunda ordem em  $\delta\theta$ , tem-se

$$\delta\beta_i = \mathcal{A}_{ij} \delta\theta_j + \frac{1}{2} \mathcal{D}_{ijk} \delta\theta_j \delta\theta_k + \mathcal{O}(\delta\theta^3), \quad (5.45)$$

com  $\mathcal{D}_{ijk} = \mathcal{A}_{ij,k} = -\psi_{,ijk}$  ( $i, j, k = 1, 2$ ) (UMETSU, 2020)(sec. 3.3).

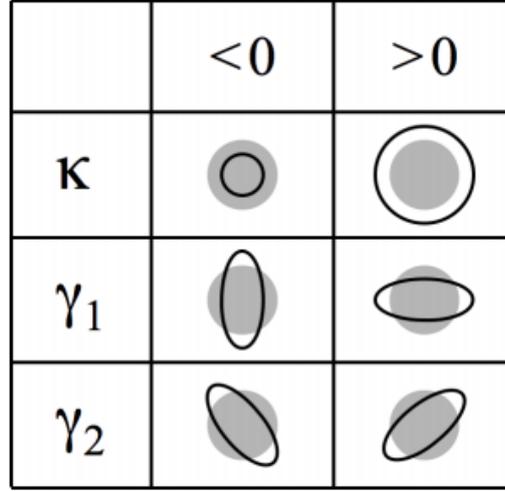


Figura 12 – Efeitos da convergência  $\kappa(\vec{\theta})$  e das componentes real  $\gamma_1(\vec{\theta})$  e imaginária  $\gamma_2(\vec{\theta})$  do cisalhamento em uma fonte circular. O círculo preenchido em cinza é a forma da fonte e o contorno em preto é a forma da imagem lenteada. Distorções no formato (de circular para elíptico) ocorrem devido ao cisalhamento. Imagem retirada de (FORD, 2015).

Dessa forma, a matriz Jacobiana (eq. (5.47)) pode ser rescrita em termos da convergência e do cisalhamento, tal

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \\
&= (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - |\gamma| \begin{pmatrix} \cos(2\phi) & \text{sen}(2\phi) \\ \text{sen}(2\phi) & -\cos(2\phi) \end{pmatrix} \\
&= (1 - \kappa)\mathcal{I} - \gamma_1\sigma_3 - \gamma_2\sigma_1,
\end{aligned} \tag{5.50}$$

em que  $\mathcal{I}$  é a matriz identidade e  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) são as matrizes de Pauli<sup>6</sup>, ou ainda em termos do cisalhamento reduzido

$$g \equiv \frac{\gamma}{1 - \kappa} = g_1 + ig_2, \tag{5.52}$$

tal

$$\mathcal{A} = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 - g_1 & -g_2 \\ -g_2 & 1 + g_1 \end{pmatrix}. \tag{5.53}$$

Note que os autovalores da matriz  $\mathcal{A}$  podem ser expressos por  $\lambda_{\pm} = 1 - \kappa \pm |\gamma|$ .

<sup>6</sup> As matrizes de Pauli são um conjunto de 3 matrizes complexas de ordem 2x2, hermitianas ( $\sigma_i = \sigma_i^\dagger$ ) e unitárias ( $\sigma_i\sigma_i^\dagger = \mathcal{I}$ ) dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.51}$$

que, portanto, satisfazem  $\det(\sigma_i) = -1$ , além de uma série de outras propriedades (HASSANI, 1999).

Pela eq.(5.50), é possível ver que a convergência atuando sozinha é responsável por uma focalização da luz de forma isotrópica, enquanto o cisalhamento induz uma anisotropia (ou assimetria) ao mapeamento, como esquematizado na Figura 12. Além disso, como a matriz  $\mathcal{A}$  pode ser diagonalizada na base dos autovetores associados aos seus autovalores  $\lambda_{\pm}$ , uma fonte circular de raio  $R$  é mapeada em uma imagem elíptica, cujos semieixos maior e menor são, respectivamente,

$$a = \frac{R}{1 - \kappa - |\gamma|}, \quad b = \frac{R}{1 - \kappa + |\gamma|}. \quad (5.54)$$

## 5.6 Magnificação, curvas críticas e cóusticas

O inverso da matriz Jacobiana é a chamada matriz magnificação  $\mathcal{M} = \mathcal{A}^{-1}$ , que mapeia as imagens da fonte no plano da lente, tal

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}_0 + \mathcal{M}(\vec{\beta} - \vec{\beta}_0). \quad (5.55)$$

A partir de  $\mathcal{M}$ , a magnificação é definida

$$\mu = \det(\mathcal{M}) = \frac{1}{\det(\mathcal{A})} = \frac{1}{\lambda_r \lambda_t}, \quad (5.56)$$

com  $\lambda_r = \lambda_+ = 1 - \kappa + |\gamma|$  e  $\lambda_t = \lambda_- = 1 - \kappa - |\gamma|$ .<sup>7</sup> Se qualquer um dos autovalores de  $\mathcal{A}$  é zero, a magnificação diverge e o conjunto dos pontos no plano da lente que satisfazem essa condição formam as denominadas curvas críticas radial (para  $\lambda_r = 0$ ) e tangencial (para  $\lambda_t = 0$ ). Os mapeamentos dessas curvas críticas no plano da fonte são as chamadas cóusticas, conforme ilustrado na Figura 13.

Apesar de, fisicamente, magnificações infinitas não ocorrem, uma fonte localizada próxima a uma cóustica tem sua imagem muitíssimo magnificada próxima a respectiva curva crítica no plano da lente (ver Figura 14).

<sup>7</sup> Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  todos os autovalores de uma matriz  $\mathcal{A}$ . Então,

$$\det(\mathcal{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad (5.57)$$

(HASSANI, 1999) (cap. 4).

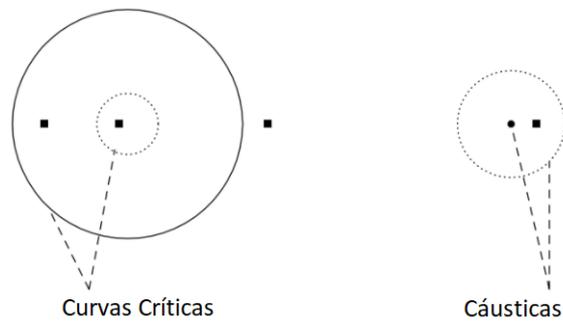


Figura 13 – Mapeamento de uma fonte pontual por uma lente de simetria circular. À esquerda, as curvas críticas radial (linha pontilhada) e tangencial (linha contínua) e as múltiplas imagens da fonte, no plano da lente. À direita, as respectivas cóusticas e a posição da fonte, no plano da fonte. Imagem adaptada de (NARAYAN; BARTELMANN, 1996).

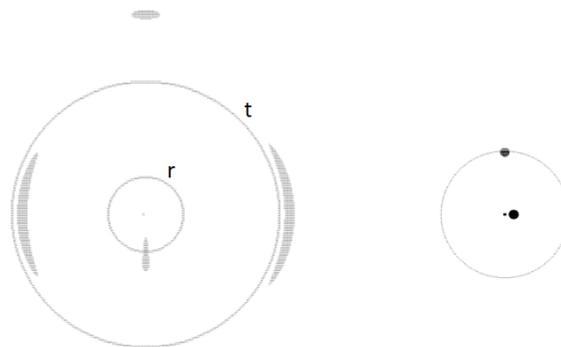


Figura 14 – Imagens de duas fontes extensas lenteadas pelo mesmo sistema da Figura 13. A fonte localizada próxima à caustica mais central (em forma de ponto) é imageada em dois longos arcos que se estendem tangencialmente próximos à curva crítica tangencial (t) e em uma imagem muitíssimo fraca no centro da lente. Já a outra fonte, localizada próxima a cóustica mais externa, é imageada em uma imagem estendida radialmente (composta pela fusão de duas imagens) que intersecta a curva crítica radial (r) e uma outra imagem alongada tangencialmente fora das curvas críticas. Imagem adaptada de (NARAYAN; BARTELMANN, 1996).



## 6 Lenteamento Gravitacional Fraco

Por serem objetos bastante massivos, aglomerados de galáxias distorcem, amplificam e podem até multiplicar imagens de galáxias ao fundo.

Normalmente, considera-se que o lenteamento por aglomerados pode ocorrer em dois regimes distintos: forte e fraco. O regime forte é caracterizado por grandes distorções e magnificações de imagens, como pela formação de múltiplas imagens de uma mesma fonte e formação de arcos (ou até mesmo anéis). Já o regime fraco é caracterizado por pequenas distorções e magnificações, de modo que é apenas detectado estatisticamente.

O sinal do lenteamento fraco pode ser utilizado, por exemplo, para: estudar o aglomerado que atua como lente, possibilitando entender como a matéria se distribui nele; estudar os objetos lentesados, uma vez que o efeito de magnificação possibilita que uma lente gravitacional funcione como um "telescópio cósmico natural", tornando possível a observação de objetos em *redshifts* maiores (representativos do universo mais jovem) e/ou de menores luminosidades intrínsecas, que não poderiam ser observados (ou que não seriam observados com a mesma resolução) sem a lente; ou, ainda, estudar até mesmo a geometria do espaço-tempo, já que os efeitos do lenteamento dependem das distâncias de diâmetro angular observador-fonte, lente-fonte e observador-lente, que por sua vez dependem da curvatura do espaço (KNEIB; NATARAJAN, 2011).

Nesta seção, serão introduzidas ideias básicas sobre o lenteamento gravitacional fraco devido a aglomerados de galáxias. Será abordado principalmente como a distribuição de matéria de um aglomerado que atua como uma lente pode ser reconstruída a partir de uma análise estatística das pequenas distorções nas formas de galáxias ao fundo que não se localizam perto das cáusticas, que é o que se denomina sinal do lenteamento fraco.

### 6.1 Elipticidade e Cisalhamento

A elipticidade de uma imagem pode ser definida como (ver (NARAYAN; BARTELMANN, 1996))

$$\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2 = \frac{a-b}{a+b}e^{i(2\phi)}, \quad (6.1)$$

em que  $a$  é o semieixo maior,  $b$  o semieixo menor e  $\phi$  é a orientação do semieixo maior da elipse. Essa eq. (6.1) pode ainda ser escrita

$$\epsilon = \frac{1-r}{1+r}e^{i(2\phi)}, \quad (6.2)$$

em que

$$r = \frac{b}{a} = \frac{1-\kappa-|\gamma|}{1-\kappa+|\gamma|} = \frac{1-|g|}{1+|g|} \quad (6.3)$$

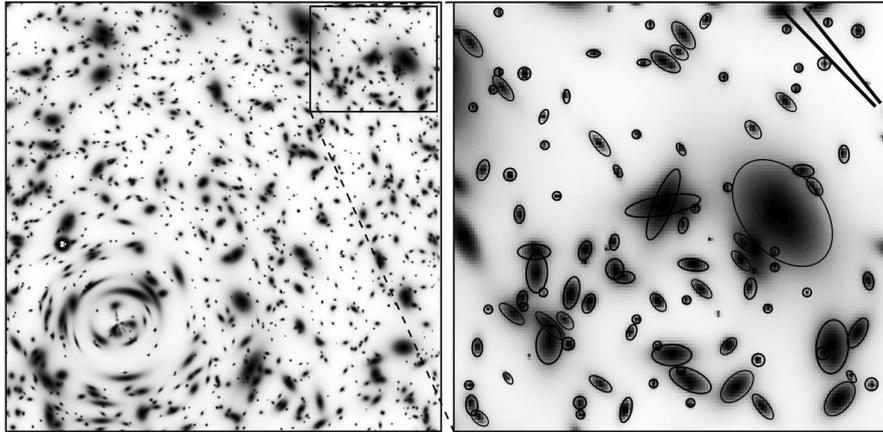


Figura 15 – Simulação de um aglomerado de galáxias (modelado como uma esfera isotérmica singular<sup>1</sup>) em *redshift*  $z = 0,15$  lenteando uma população de galáxias com *redshift* médio  $\bar{z} = 1$ . Na região mais próxima ao aglomerado, é possível observar os arcos radiais e tangenciais, que ocorrem no regime de lenteamento forte. Já nas regiões mais afastadas, como a região que foi expandida à direita, a elipticidade produzida pelo cisalhamento é menor que a elipticidade intrínseca das galáxias, como é esperado no regime de lenteamento fraco. A orientação média das galáxias nessa região é dada pelos traços sólidos no canto superior direito, sendo o traço inferior a orientação do cisalhamento produzido pelo aglomerado e o traço superior a orientação calculada a partir das 92 galáxias que estão na região. A diferença de inclinação entre os dois traços se dá devido às elipticidades e orientações intrínsecas das galáxias. Imagem retirada de (MELLIER, 1999).

é a razão entre o semieixo menor e maior da elipse, conforme eq.(5.54).

Uma vez que a separação entre as imagens é normalmente bem menor que a escala em que o potencial gravitacional do aglomerado varia significativamente, imagens de galáxias que estão próximas são distorcidas de forma similar. Dessa forma, tomando a média das elipticidades em uma região finita do céu, pelas eqs. (6.2) e (6.3) tem-se

$$\langle \epsilon \rangle \approx \langle g \rangle. \quad (6.5)$$

No limite de lenteamento fraco ( $\kappa \ll 1$  e  $|\gamma| \ll 1$ ), tem-se ainda

$$\langle \gamma_1(\vec{\theta}) \rangle \approx \langle \epsilon_1(\vec{\theta}) \rangle, \quad \langle \gamma_2(\vec{\theta}) \rangle \approx \langle \epsilon_2(\vec{\theta}) \rangle. \quad (6.6)$$

Diante disso, caso as fontes lenteadas por um aglomerado fossem perfeitamente circulares, o cisalhamento poderia ser obtido a partir da média das elipticidades (incluindo orientações  $\phi$ ) induzida pelo lenteamento.

<sup>1</sup> A esfera isotérmica singular é uma das modelagens mais simplificadas (e mais antigas) para um halo de matéria escura. O perfil de densidade de uma esfera isotérmica é tal que

$$\rho(r) \propto \frac{1}{r^2} \quad (6.4)$$

(COLE; LACEY, 1996).

No entanto, as galáxias lenticadas geralmente já possuem uma elipticidade intrínseca, de modo que a elipticidade da imagem observada é uma combinação das elipticidades intrínseca e induzida, sendo essa última bem pequena. Para se obter uma estimativa do cisalhamento nesse caso, pode-se considerar a hipótese de que as orientações das elipticidades intrínsecas das fontes lenticadas se distribuem de forma aleatória, tal que

$$\langle \epsilon^F \rangle = 0. \quad (6.7)$$

Segue disso que, caso a média das elipticidades das imagens em uma região for diferente de zero, a variação ocorrida pode ser atribuída ao cisalhamento.

Vale ressaltar que  $\langle \epsilon_1(\vec{\theta}) \rangle$  e  $\langle \epsilon_2(\vec{\theta}) \rangle$  devem ser obtidos ao se fazer uma média de uma quantidade significativa de galáxias lenticadas em uma região para que se tenha uma boa razão sinal-ruído (ver (MELLIER, 1999) (sec. 3.3)).

## 6.2 Algoritmo de Kaiser & Squires

As componentes do cisalhamento  $\gamma_1(\vec{\theta})$  e  $\gamma_2(\vec{\theta})$ , obtidas a partir das elipticidades das galáxias de fundo lenticadas no regime de lenteamento fraco, podem ser usadas para se obter a distribuição de matéria do aglomerado que atua como lente a partir do algoritmo de Kaiser & Squires (KAISER; SQUIRES, 1993). Essa técnica se baseia no fato de que tanto a convergência quanto as componentes do cisalhamento são derivadas segundas do potencial  $\psi$  (tal eqs. (5.48) e (5.49)) e, logo, existe uma relação matemática entre as grandezas que possibilita que  $\kappa(\vec{\theta})$  possa ser calculado a partir de  $\gamma_1(\vec{\theta})$  e  $\gamma_2(\vec{\theta})$ .

Para tal, pode-se definir o operador

$$\partial \equiv \frac{\partial}{\partial \theta_1} + i \frac{\partial}{\partial \theta_2} \quad (6.8)$$

de forma que a convergência (ver eq. (5.48)) e o cisalhamento (ver eq. (5.49)) podem ser reescritos

$$\kappa(\vec{\theta}) = \frac{1}{2} \partial^* \partial \psi(\vec{\theta}) \quad (6.9)$$

e

$$\gamma(\vec{\theta}) = \frac{1}{2} \partial \partial \psi(\vec{\theta}) = \hat{D} \psi(\vec{\theta}), \quad (6.10)$$

em que

$$\hat{D} \equiv \frac{1}{2} \partial \partial = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right)^2 \right] + i \frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \quad (6.11)$$

e  $\partial^*$  denota o complexo conjugado de  $\partial$ .

Com essa notação, temos que

$$\partial^* \partial \kappa(\vec{\theta}) = \partial^* \partial^* \gamma(\vec{\theta}), \quad (6.12)$$

ou ainda,

$$\nabla_{\vec{\theta}}^2 \kappa(\vec{\theta}) = 2\hat{D}^* \gamma(\vec{\theta}), \quad (6.13)$$

em que

$$\nabla_{\vec{\theta}}^2 = \left( \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right)^2. \quad (6.14)$$

Note que  $\hat{D}^* \gamma(\vec{\theta})$  é real.

Considerando a relação existente entre as eqs. (5.44) e (5.40), a eq. (6.13) implica

$$\kappa(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int D^*(\vec{\theta} - \vec{\theta}') \gamma(\vec{\theta}') d^2 \theta', \quad (6.15)$$

com

$$D(\vec{\theta} - \vec{\theta}') = \hat{D} \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'|. \quad (6.16)$$

Obtida, então, a convergência a partir do cisalhamento, a densidade superficial de massa da lente pode ser obtida pela eq. (5.37). Mais detalhes sobre essa técnica podem ser encontrados, por exemplo, em (NARAYAN; BARTELMANN, 1996) (sec. 4.2.1) e (UMETSU, 2020) (sec. 3.1.2).

Diante disso, o sinal do lenteamento fraco é interessante pois possibilita que a distribuição projetada de matéria em um aglomerado de galáxias seja obtida sem considerações sobre o estado dinâmico ou termodinâmico do aglomerado, diferentemente de outros observáveis como os sinais de raio X e do efeito Sunyaev-Zeldovich (COMBET et al., 2019).

### 6.3 Degenerescência da Folha de Massa

Entretanto, existe uma degenerescência nas soluções desse problema da reconstrução de  $\kappa(\vec{\theta})$  a partir  $\gamma(\vec{\theta})$ , conhecida como degenerescência da folha de massa (em inglês, *mass-sheet degeneracy*).

A transformação dada por

$$\kappa(\vec{\theta}) \rightarrow \kappa_{\lambda}(\vec{\theta}) = (1 - \lambda) + \lambda \kappa(\vec{\theta}) \quad (6.17)$$

e

$$\gamma(\vec{\theta}) \rightarrow \gamma_{\lambda}(\vec{\theta}) = \lambda \gamma(\vec{\theta}), \quad (6.18)$$

com  $\lambda \neq 0$ , deixa o cisalhamento reduzido  $g(\vec{\theta})$  (dado pela eq. (5.52)) invariante. Essa transformação dada pelas eqs. (6.17) e (6.18) é equivalente a

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\lambda} = \lambda \mathcal{A}, \quad (6.19)$$

que nitidamente preserva a localização das curvas críticas, já que  $\det(\mathcal{A}_{\lambda}) = \lambda^2 \det(\mathcal{A})$  e, logo,  $\det(\mathcal{A}) = 0 \leftrightarrow \det(\mathcal{A}_{\lambda}) = 0$ . É possível notar, ainda, que a localização da curva  $\kappa(\vec{\theta}) = 1$ , em que  $\Sigma(\vec{\theta}) = \Sigma_{crit}$ , também se mantém inalterada, i.e.  $\kappa(\vec{\theta}) = 1 \leftrightarrow \kappa_{\lambda}(\vec{\theta}) = 1$ .

Dessa forma, qualquer método que se baseia apenas na informação da distorção na forma das galáxias (de onde o cisalhamento reduzido  $g(\vec{\theta})$  pode ser obtido, conforme eq. (6.5)) é incapaz de determinar o campo  $\kappa(\vec{\theta})$  sem ambiguidade. Obtém-se, no entanto, uma família de soluções  $\kappa_\lambda(\vec{\theta})$ .

Essa degenerescência pode ser quebrada (ou aliviada) se tem-se também a informação da magnificação (ver eq. (5.56)) das imagens das galáxias, uma vez que

$$\mu(\theta) \rightarrow \mu_\lambda(\theta) = \frac{\mu(\theta)}{\lambda^2}. \quad (6.20)$$

Uma outra forma de quebrar a degenerescência da folha de massa é se galáxias a diferentes distâncias  $D_F$  estão sendo lentesadas, já que a convergência (ver eqs. (5.37) e (5.38)) obtida será diferente para cada uma delas.

Essa degenerescência foi descoberta por Falco, Gorenstein & Shapiro (FALCO; GORENSTEIN; SHAPIRO, 1985) (sec. 2.b) e, posteriormente, sinalizada também por Schneider & Seitz (SCHNEIDER; SEITZ, 1995) (sec. 3.4). Mais informações podem ser encontradas em (NARAYAN; BARTELMANN, 1996) (sec. 4.2.2), (SCHNEIDER; KOCHANNEK; WAMBSGANSS, 2006) (sec. 2.5) e (UMETSU, 2020) (sec. 3.1.3).



## 7 Modelos de Lente para os Perfis

No Capítulo 6, foi apresentado como a densidade superficial de massa de um aglomerado que atua como lente pode ser obtida, no regime linear, pelas componentes real e imaginária do cisalhamento, que por sua vez podem ser obtidas pelas componentes real e imaginária da elipticidade. Foi apresentado, ainda, que essa reconstrução apresenta uma degenerescência.

Neste capítulo, serão apresentadas as componentes tangencial-radial e 45°-rotacionada do cisalhamento e como elas podem ser utilizadas para se obter o excesso de densidade superficial de massa (ver eq. (7.22)) e para se identificar erros sistemáticos envolvidos na obtenção do sinal do lenteamento fraco. Serão apresentados, ainda, modelos de lentes para os perfis do capítulo 4, conforme se explicará mais a frente.

Seguindo os passos de (KAISER, 1995) e (UMETSU, 2020) (sec. 3.5), pode-se definir um sistema de coordenadas polares com origem em um ponto arbitrário  $\vec{\theta}_c$  do céu, como o centro do aglomerado<sup>1</sup>, tal que

$$\vec{\theta} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi) + \vec{\theta}_c, \quad (7.1)$$

com  $R$  a coordenada radial e  $\varphi$  a coordenada azimutal. Pode-se definir, ainda, as componentes

$$\gamma_+(R, \varphi) = -\gamma_1(R, \varphi)\cos(2\varphi) - \gamma_2(R, \varphi)\sin(2\varphi), \quad (7.2)$$

$$\gamma_\times(R, \varphi) = +\gamma_1(R, \varphi)\sin(2\varphi) - \gamma_2(R, \varphi)\cos(2\varphi), \quad (7.3)$$

em que  $\gamma_+(R, \varphi)$  é a componente cisalhamento tangencial-radial (tangencial quando positiva, radial quando negativa) relativa a  $\vec{\theta}_c$  e  $\gamma_\times(R, \varphi)$  é a componente cisalhamento 45°-rotacionada (em um ângulo de  $\pm 45^\circ$ ) relativa a  $\vec{\theta}_c$ .

Para escrever  $\gamma_+(R, \varphi)$  e  $\gamma_\times(R, \varphi)$ , precisa-se primeiro escrever as componentes  $\gamma_1(\vec{\theta})$  e  $\gamma_2(\vec{\theta})$  definidas pela eq. (5.49) em termos de  $R$  e  $\varphi$ . Pela eq. (7.1), que relaciona o sistema de coordenadas cartesianas  $(\theta_1, \theta_2)$  ao sistema de coordenadas polares  $(R, \varphi)$ , as

<sup>1</sup> O centro do aglomerado é normalmente determinado pela simetria do padrão do lenteamento forte, pela posição do centróide do sinal de raio  $X$  ou pela posição da galáxia mais brilhante do aglomerado.

segundas derivadas parciais do potencial da lente  $\psi_{,ij}$  (ver eq. (5.47)) podem ser escritas

$$\begin{aligned}\psi_{,11} &= \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{\partial R}{\partial\theta_1} \frac{\partial\psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial R}{\partial\theta_1} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{\partial R}{\partial\theta_1} \frac{\partial\psi}{\partial R} \right) \\ &= -\frac{\text{sen}\varphi}{R} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left( -\frac{\text{sen}\varphi}{R} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \text{cos}\varphi \frac{\partial\psi}{\partial R} \right) + \text{cos}\varphi \frac{\partial}{\partial R} \left( -\frac{\text{sen}\varphi}{R} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \text{cos}\varphi \frac{\partial\psi}{\partial R} \right) \\ &= \frac{2\text{sen}\varphi\text{cos}\varphi}{R^2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{\text{sen}^2\varphi}{R} \frac{\partial\psi}{\partial R} - \frac{2\text{sen}\varphi\text{cos}\varphi}{R} \frac{\partial^2\psi}{\partial R\partial\varphi} + \frac{\text{sen}^2\varphi}{R^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \text{cos}^2\varphi \frac{\partial^2\psi}{\partial R^2},\end{aligned}\quad (7.4)$$

$$\psi_{,22} = -\frac{2\text{sen}\varphi\text{cos}\varphi}{R^2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{\text{cos}^2\varphi}{R} \frac{\partial\psi}{\partial R} + \frac{2\text{sen}\varphi\text{cos}\varphi}{R} \frac{\partial^2\psi}{\partial R\partial\varphi} + \frac{\text{cos}^2\varphi}{R^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \text{sen}^2\varphi \frac{\partial^2\psi}{\partial R^2}, \quad (7.5)$$

de forma que as componentes real e imaginária do cisalhamento em função de  $R$  e  $\varphi$  são

$$\gamma_1(R, \varphi) = \frac{\text{sen}(2\varphi)}{R^2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - \frac{\text{cos}(2\varphi)}{R} \frac{\partial\psi}{\partial R} - \frac{\text{sen}(2\varphi)}{R} \frac{\partial^2\psi}{\partial R\partial\varphi} - \frac{\text{cos}(2\varphi)}{R^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \text{cos}(2\varphi) \frac{\partial^2\psi}{\partial R^2}, \quad (7.6)$$

$$\gamma_2(R, \varphi) = \psi_{,12} = -\frac{\text{cos}(2\varphi)}{R^2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - \frac{\text{sen}(2\varphi)}{2R} \frac{\partial\psi}{\partial R} + \frac{\text{cos}(2\varphi)}{R} \frac{\partial^2\psi}{\partial R\partial\varphi} - \frac{\text{sen}(2\varphi)}{2R^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\text{sen}(2\varphi)}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial R^2}. \quad (7.7)$$

Substituindo as eqs. (7.4) e (7.5) na eq. (5.48), tem-se também a convergência em função de  $R$  e  $\varphi$ , tal

$$\kappa(R, \varphi) = \frac{1}{2R} \frac{\partial\psi}{\partial R} + \frac{1}{2R^2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial R^2}, \quad (7.8)$$

em concordância com a eq. (5.44), já que em coordenadas polares o operador laplaciano é dado por  $\nabla^2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2}{\partial R^2}$ .

A partir das eqs. (7.6), (7.7) e (7.8), as eqs. (7.2) e (7.3) podem ser escritas

$$\begin{aligned}\gamma_+(R, \varphi) &= \frac{1}{2R} \frac{\partial\psi}{\partial R} + \frac{1}{2R^2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial R^2} \\ &= \kappa(R, \varphi) - \frac{\partial^2\psi}{\partial R^2},\end{aligned}\quad (7.9)$$

$$\gamma_\times(R, \varphi) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2\psi}{\partial R\partial\varphi}. \quad (7.10)$$

Para prosseguir, é necessário calcular as médias azimutais de  $\gamma_+(R, \varphi)$  e  $\gamma_\times(R, \varphi)$ , dadas por

$$\gamma_+(R) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \gamma_+(R, \varphi) d\varphi, \quad (7.11)$$

$$\gamma_\times(R) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \gamma_\times(R, \varphi) d\varphi, \quad (7.12)$$

com  $C$  um contorno circular. Para isso, pode-se fazer uso de uma versão bidimensional do Teorema de Gauss, tal

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds = \int_A \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, da, \quad (7.13)$$

em que  $A$  é a área delimitada pelo contorno circular  $C$ ,  $ds$  é o elemento de linha,  $da$  é o elemento de área e  $\hat{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$  é um vetor unitário sempre perpendicular à  $C$  que aponta para fora.

Assim, escolhendo  $\vec{F} = \vec{\nabla}\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta_1}, \frac{\partial\psi}{\partial\theta_2}\right)$ , tal que  $\vec{F} \cdot \hat{n} = \frac{\partial\psi}{\partial R}$ , tem-se

$$R \oint_C \frac{\partial\psi}{\partial R} d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^R \kappa(R', \varphi) R' dR' d\varphi, \quad (7.14)$$

ou ainda

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{\partial\psi}{\partial R} d\varphi = \frac{2}{R} \int_0^R \kappa(R') R' dR', \quad (7.15)$$

em que

$$\kappa(R) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \kappa(R, \varphi) d\varphi. \quad (7.16)$$

Tomando a derivada da eq. (7.15) em relação à  $R$ , chega-se à expressão

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{\partial^2\psi}{\partial R^2} d\varphi &= -\frac{2}{R^2} \int_0^R \kappa(R') R' dR' + \frac{2}{R} \frac{d}{dR} \int_0^R \kappa(R') R' dR' \\ &= -\bar{\kappa}(R) + 2\kappa(R), \end{aligned} \quad (7.17)$$

em que

$$\bar{\kappa}(R) = \frac{2\pi \int_0^R \kappa(R') R' dR'}{\pi R^2} \quad (7.18)$$

é a convergência média dentro de um círculo de raio  $R$  (ao redor de  $\vec{\theta}_c$ ).

Substituindo as eqs. (7.9) e (7.17) na eq. (7.11), chega-se a

$$\begin{aligned} \gamma_+(R) &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \kappa(R, \varphi) d\varphi - \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{\partial^2\psi}{\partial R^2} d\varphi \\ &= \kappa(R) - [-\bar{\kappa}(R) + 2\kappa(R)] \\ &= \bar{\kappa}(R) - \kappa(R). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Utilizando, ainda, a relação entre a convergência e a densidade superficial de massa em função de  $R$ , tal

$$\kappa(R) = \frac{\Sigma(R)}{\Sigma_{crit}}, \quad (7.20)$$

conforme eq. (5.37), a eq. (7.19) pode ser reescrita

$$\Delta\Sigma(R) = \Sigma_{crit}\gamma_+(R) \quad (7.21)$$

em que

$$\Delta\Sigma(R) = \bar{\Sigma}(R) - \Sigma(R) \quad (7.22)$$

é o excesso de densidade superficial de massa em função de  $R$  e

$$\bar{\Sigma}(R) = \frac{2\pi \int_0^R \Sigma(R') R' dR'}{\pi R^2} \quad (7.23)$$

é a densidade superficial de massa média (dentro de um círculo de  $R$  ao redor de  $\vec{\theta}_c$ ).

Por outro lado, escolhendo  $\vec{F} = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial\theta_2}, \frac{\partial\psi}{\partial\theta_1}\right)$ , tal que  $\vec{F} \cdot \hat{n} = \frac{-1}{R} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$ , tem-se

$$\oint_C \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} d\varphi = \int_A (-\psi_{,12} + \psi_{,21}) da = 0, \quad (7.24)$$

de modo que substituindo a eq. (7.10) na eq. (7.12), chega-se a

$$\begin{aligned} \gamma_{\times}(R) &= \frac{1}{R^2} \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} d\varphi - \frac{1}{2\pi R^2} \frac{\partial}{\partial R} \oint_C \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} d\varphi \\ &= 0. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Derivando a eq. (7.18) em relação à  $R$ , tal

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\kappa}(R)}{dR} &= -\frac{4}{R^3} \int_0^R \kappa(R') R' dR' + \frac{2}{R^2} \frac{d}{dR} \int_0^R \kappa(R') R' dR' \\ &= \frac{2}{R} (-\bar{\kappa}(R) + \kappa(R)), \end{aligned} \quad (7.26)$$

tem-se também a relação

$$\frac{d\bar{\kappa}(R)}{d\ln R} = -2\gamma_{+}(R). \quad (7.27)$$

Dessa forma, enquanto a eq. (7.21) pode ser utilizada para se obter o excesso de densidade superficial  $\Delta\Sigma(R)$  a partir da componente cisalhamento tangencial-radial  $\gamma_{+}(R)$ , dada pela média azimutal de  $\gamma_{+}(R, \varphi)$ , mesmo que a distribuição de massa da lente não seja circularmente simétrica ao redor de  $\vec{\theta}_c$ , a eq. (7.25) pode ser utilizada para se identificar erros sistemáticos na obtenção do sinal do lenteamento fraco, uma vez que  $\gamma_{\times}(R)$  deve ser igual a zero se não há erros sistemáticos envolvidos. Uma outra forma de se obter as eqs. (7.19) e (7.25) pode ser encontrada em (CONGDON; KEETON, 2018) (subsec. 7.2.3).

Ainda, enquanto o excesso de densidade superficial  $\Delta\Sigma(R)$  pode ser obtido a partir de  $\gamma_{+}(R)$  pela eq. (7.21), ou seja, a partir do sinal do lenteamento fraco, ele pode ser obtido também a partir de  $\rho(r)$ , dado um certo modelo de perfil de densidade, a partir das eqs. (5.34), (7.22) e (7.23), sendo que essa primeira pode ser escrita em função de  $R$  como

$$\Sigma(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\sqrt{R^2 + z^2}) dz. \quad (7.28)$$

É interessante, portanto, caracterizar os modelos de lentes para os perfis, i.e., encontrar as funções analíticas para  $\Delta\Sigma(R)$  (ou, equivalentemente, para  $\Sigma(R)$  e  $\bar{\Sigma}(R)$ ) para cada um dos perfis. Segue-se a caracterização dos modelos de lentes para os perfis abordados no capítulo 4, salvo para o perfil DK14.

### 7.0.1 Lente Hernquist

Para o perfil Hernquist (ver subseção 4.1.1), tem-se as funções analíticas

$$\Sigma_{HER}(x) = \frac{\rho_s r_s}{(1-x^2)^2} \begin{cases} \left[ (2+x^2) \frac{\operatorname{sech}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} - 3 \right] & 0 \leq x \leq 1 \\ \left[ (2+x^2) \frac{\operatorname{sec}^{-1} x}{\sqrt{x^2-1}} - 3 \right] & x \geq 1 \end{cases}, \quad (7.29)$$

$$\bar{\Sigma}_{HER}(x) = \left[ \frac{2\rho_s r_s}{x^2} + \frac{2\rho_s r_s}{1-x^2} \begin{cases} \left( \frac{\operatorname{sech}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x^2} \right) & 0 \leq x \leq 1 \\ \left( \frac{\operatorname{sec}^{-1} x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x^2} \right) & x \geq 1 \end{cases} \right], \quad (7.30)$$

em que  $x = R/r_s$ . Mais características desse modelo podem ser encontradas em (SHIN; EVANS, 2007).

### 7.0.2 Lente NFW

Para o perfil NFW (ver subseção 4.1.2), tem-se as funções analíticas

$$\Sigma_{NFW}(x) = 2\rho_s r_s \begin{cases} \frac{1}{x^2-1} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) & x < 1 \\ \frac{1}{3} & x = 1 \\ \frac{1}{x^2-1} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-1}{1+x}} \right) & x > 1 \end{cases}, \quad (7.31)$$

$$\bar{\Sigma}_{NFW}(x) = 4\rho_s r_s \begin{cases} \frac{1}{x^2} \left[ \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln \left( \frac{x}{2} \right) \right] & x < 1 \\ 1 + \ln \left( \frac{1}{2} \right) & x = 1 \\ \frac{1}{x^2} \left[ \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-1}{1+x}} + \ln \left( \frac{x}{2} \right) \right] & x > 1 \end{cases}, \quad (7.32)$$

em que  $x = R/r_s$ . Para mais detalhes, ver (WRIGHT; BRAINERD, 2000).

### 7.0.3 Lente Einasto

Para o perfil Einasto (ver subseção 4.1.3), as funções  $\Sigma$  e  $\bar{\Sigma}$  podem ser calculadas de forma analítica por uma função H de Fox tal

$$\Sigma_{EIN}(x) = \frac{2\rho_s r_s e^{2n} \sqrt{n}}{(2n)^n} x H_{1,2}^{2,0} \left[ \begin{matrix} (0, 1) \\ (0, 2n), (-\frac{1}{2}, 1) \end{matrix} \middle| x^2 \right], \quad (7.33)$$

$$\bar{\Sigma}_{EIN}(x) = \frac{2\rho_s r_s e^{2n} \sqrt{n}}{(2n)^n} x H_{2,3}^{2,1} \left[ \begin{matrix} (-\frac{1}{2}, 1), (0, 1) \\ (0, 2n), (-\frac{1}{2}, 1), (-\frac{3}{2}, 1) \end{matrix} \middle| x^2 \right], \quad (7.34)$$

ou ainda, para o caso em que  $n = 1/\alpha$  é inteiro ou metade de um inteiro, como uma função G de Meijer tal

$$\Sigma_{EIN}(x) = \frac{\rho_s r_s e^{2n} \sqrt{n}}{(2\pi)^{n-1} (2n)^n} x G_{0,2n}^{2n,0} \left( - \middle| \frac{x^2}{(2n)^{2n}} \right), \quad (7.35)$$

$$\bar{\Sigma}_{EIN}(x) = \frac{\rho_s r_s e^{2n} \sqrt{n}}{(2\pi)^{n-1} (2n)^n} x G_{1,2n+1}^{2n,1} \left( -\frac{1}{2} \middle| \frac{x^2}{(2n)^{2n}} \right), \quad (7.36)$$

em que

$$\mathbf{b} = \left\{ \frac{1}{2n}, \dots, \frac{2n-1}{2n}, -\frac{1}{2} \right\} \quad (7.37)$$

é um vetor de tamanho  $2n$  e  $x = (2n)^n R/r_s$ . Mais propriedades analíticas do perfil Einasto podem ser encontradas em ([RETANA-MONTENEGRO et al., 2012](#)).

## 8 Código Escrito e Resultados

O código escrito pode ser encontrado em formato de *Jupyter Notebook* (.ipynb) em <[https://github.com/victorportog/galaxyclusters\\_profiles](https://github.com/victorportog/galaxyclusters_profiles)>. Em sua composição, diferentes ferramentas disponíveis nos pacotes NumPy (HARRIS et al., 2020), SciPy (VIRTANEN et al., 2020), matplotlib (HUNTER, 2007) e mpmath (JOHANSSON et al., 2013) foram utilizadas.

No código, foram implementados os perfis internos de densidade (Hernquist, NFW e Einasto) e suas respectivas derivadas logarítmicas apresentados no Capítulo 4, inclusive também quando combinados a perfis externos compostos somente pelo termo de densidade média de matéria  $\rho_{ext}(r) = \rho_m(z)$ , somente pelo termo de densidade de 2-halo  $\rho_{ext}(r) = \rho_{2h}(r)$  ou por uma combinação de ambos  $\rho_{ext}(r) = \rho_{2h}(r) + \rho_m(z)$ . Foram implementadas também as densidades superficiais de massa  $\Sigma(R)$  (tanto as funções analíticas - eqs. (7.29), (7.31) e (7.35) - quanto a integração numérica da eq. (7.28)), as densidades superficiais de massa média  $\bar{\Sigma}(R)$  (somente as funções analíticas - eqs. (7.30), (7.32) e (7.36)) e os excessos de densidade superficial de massa  $\Delta\Sigma(R)$  (somente para as funções analíticas) apresentadas no Capítulo 7.

Os resultados obtidos (sinalizados com SCR) foram comparados com os do pacote Colossus<sup>1</sup> (DIEMER, 2018) (sinalizados com COL), conforme Figuras 16 - 20. Essa comparação mostra a boa concordância dos resultados, indicada pelo cálculo da diferença relativa. Em particular, para a Figura 20, essa concordância sugere que a implementação das funções analíticas apresentadas é praticamente equivalente a outras formas de se realizar o cálculo numérico das quantidades estudadas, levando-se em consideração, claro, a validade de aplicação das eqs. (7.35) e (7.36).

Vale ressaltar que os cálculos da variância  $\sigma^2(R, z)$  (ver eq. (2.12)), da função de correção matéria-matéria  $\xi_{mm}(r, z)$  (ver eq. (2.8)) e do parâmetro  $\alpha$  do perfil Einasto (ver eq. (4.16)) não foram implementados no código, de forma que foram utilizadas as respectivas funções disponíveis no Colossus. Ainda, para o cálculo da altura de pico  $\nu(M, z)$  (ver eq. (2.48)), não foram implementadas no código as correções de  $\delta_c^{linear}$  para diferentes modelos cosmológicos e para diferentes *redshifts* (ver eqs. (2.44), (2.45) e (2.46)), ou seja, foi considerada apenas a aproximação dada pela eq. (2.43).

O pacote Colossus usa, por padrão,  $\rho_s$  e  $r_s$  como parâmetros fundamentais, ao invés da massa  $M_\Delta$  e da concentração  $c_\Delta$ . Porém, possibilita modificar os parâmetros de entrada de  $(\rho_s, r_s)$  para  $(M_\Delta, c_\Delta)$ , e é isso o que foi feito para realizar as comparações.

<sup>1</sup> *Colossus* (acrônimo de *COsmology, haLO, and large-Scale StrUcture tools*) - disponível em <<https://bdiemer.bitbucket.io/colossus/index.html>>.

No Colossus, a forma de calcular  $\rho_s$  a partir de  $(M_\Delta, c_\Delta)$  leva em conta o perfil externo, quando o perfil interno é Einasto. No entanto, esse cálculo considera somente o perfil interno para NFW e Hernquist. No código que faz parte deste trabalho, o cálculo de  $\rho_s$  a partir de  $(M_\Delta, c_\Delta)$  é dado pelas eqs. (4.8), (4.14) e (4.24), levando em conta apenas o perfil interno<sup>2</sup> (ver eqs. (4.6), (4.12) e (4.20)). Essa é a origem da discrepância ( $\sim 10^{-4}$  -  $10^{-1}$ ) encontrada entre os resultados do código escrito e do Colossus quando utilizamos Einasto como perfil interno e adicionamos algum perfil externo (ver Figuras 17 - 19).

As comparações aqui apresentadas foram realizadas com o Colossus, mas também existe disponível em formato de *Jupyter Notebook* a checagem cruzada - para os perfis internos (Hernquist, NFW e Einasto) - entre o Colossus e a biblioteca NumCosmo<sup>3</sup> (VINTENTI; PENNA-LIMA, 2014) em <<https://github.com/NumCosmo/NumCosmo/tree/master/notebooks>>. Atualmente, estamos implementando o perfil Diemer-Kravtsov (DK14) e também as várias modelagens para o perfil externo na NumCosmo. A motivação para dar continuidade ao desenvolvimento da implementação na NumCosmo, e não no código avulso escrito em Python, se dá por ela já possuir disponível as implementações dos perfis internos tanto analíticas como numéricas, além de fornecer também inúmeras ferramentas para cálculos de cosmologia/astrofísica e para realização de análises estatísticas.

Existem outros códigos disponíveis, como a biblioteca CCL<sup>4</sup> (CHISARI et al., 2019) e o pacote Cluster Toolkit<sup>5</sup>, que também possuem aparato para gerar as curvas dos perfis de densidade. Na CLL, estão disponíveis atualmente os modelos Hernquist, NFW e Einasto. Já no Cluster Toolkit, os modelos NFW e Einasto. Essas bibliotecas também foram comparadas com a NumCosmo e Colossus, e possuem (atualmente) precisão numérica menor.

<sup>2</sup> O correto é sempre considerar os perfis interno e externo para realizar o cálculo do  $\rho_s$ . Todas as extensões dos cálculos das densidades estão sendo implementadas de forma consistente na NumCosmo. E estarão disponíveis em breve para a comunidade científica.

<sup>3</sup> *Numerical Cosmology* - disponível em <<https://github.com/NumCosmo/NumCosmo>>.

<sup>4</sup> *Core Cosmology Library* - disponível em <<https://ccl.readthedocs.io/en/latest/index.html>>.

<sup>5</sup> *Cluster Toolkit* - disponível em <<https://cluster-toolkit.readthedocs.io/en/latest/index.html>>.

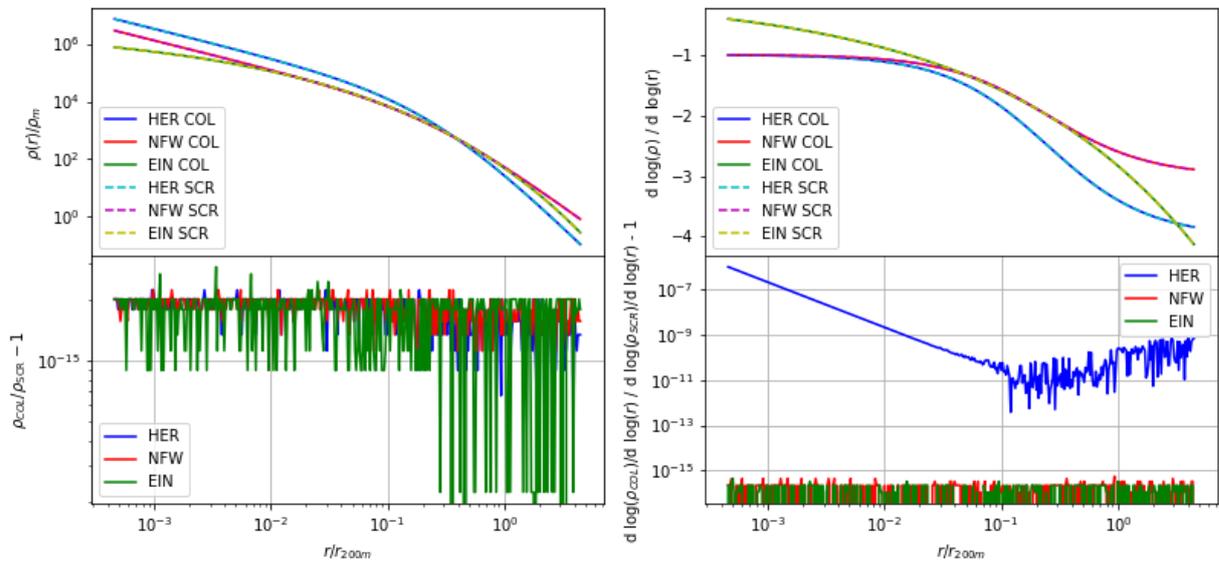


Figura 16 – Perfis de densidade dos halos (primeiro gráfico à esquerda) e suas derivadas logarítmicas (primeiro gráfico à direita) para diferentes modelos de perfis internos (Hernquist - HER, Navarro-Frenk-White - NFW e Einasto - EIN). Abaixo de cada um, apresenta-se um comparativo (diferença relativa) com os resultados obtidos com o pacote Colossus. Os resultados foram obtidos para um halo em *redshift*  $z = 0.1$  com  $M_{200m} = 10^{15} M_{\odot} h^{-1}$  e  $c_{200m} = 4$ , e considerando  $\Omega_{\Lambda,0} = 0,691$ ,  $\Omega_{m,0} = 0,3089$  e  $\Omega_{k,0} = 0$ .

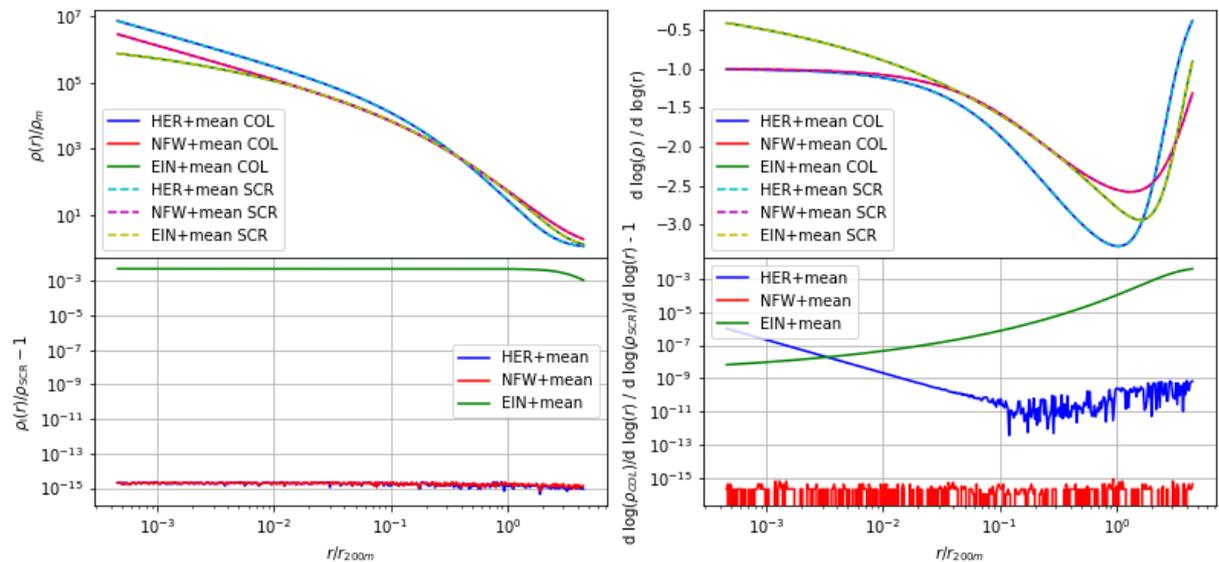


Figura 17 – Perfis de densidade dos halos (primeiro gráfico à esquerda) e suas derivadas logarítmicas (primeiro gráfico à direita) para diferentes modelos de perfis internos (HER, NFW e EIN) combinados a um perfil externo  $\rho_{ext}(r) = \rho_m(z)$ . Abaixo de cada um, apresenta-se um comparativo (diferença relativa) com os resultados obtidos com o pacote Colossus. Os resultados foram obtidos para um halo em *redshift*  $z = 0.1$  com  $M_{200m} = 10^{15} M_{\odot} h^{-1}$  e  $c_{200m} = 4$ , e considerando  $\Omega_{\Lambda,0} = 0,691$ ,  $\Omega_{m,0} = 0,3089$  e  $\Omega_{k,0} = 0$ .

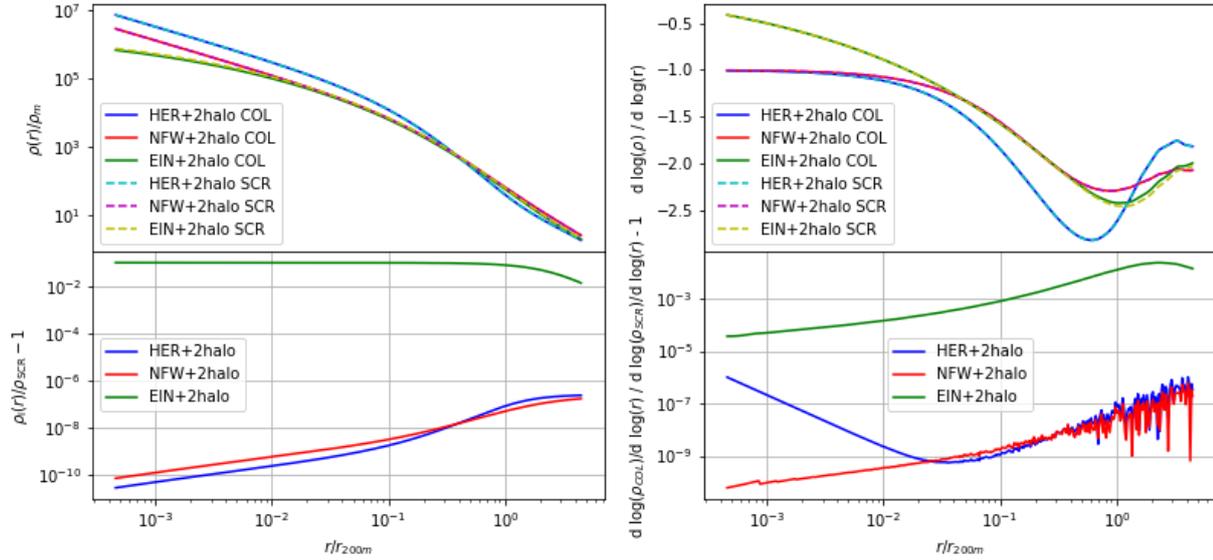


Figura 18 – Perfis de densidade dos halos (primeiro gráfico à esquerda) e suas derivadas logarítmicas (primeiro gráfico à direita) para diferentes modelos de perfis internos (HER, NFW e EIN) combinados a um perfil externo  $\rho_{ext}(r) = \rho_{2h}(r)$ . Abaixo de cada um, apresenta-se um comparativo (diferença relativa) com os resultados obtidos com o pacote Colossus. Os resultados foram obtidos para um halo em *redshift*  $z = 0.1$  com  $M_{200m} = 10^{15} M_{\odot} h^{-1}$  e  $c_{200m} = 4$ , e considerando  $\Omega_{\Lambda,0} = 0,691$ ,  $\Omega_{m,0} = 0,3089$  e  $\Omega_{k,0} = 0$ .

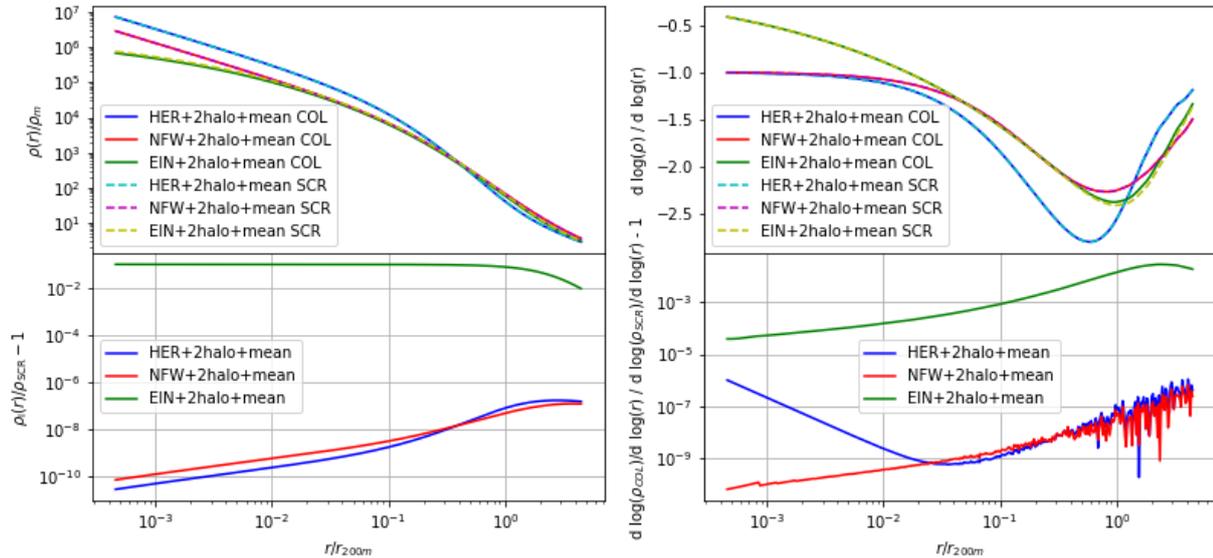


Figura 19 – Perfis de densidade dos halos (primeiro gráfico à esquerda) e suas derivadas logarítmicas (primeiro gráfico à direita) para diferentes modelos de perfis internos (HER, NFW e EIN) combinados a um perfil externo  $\rho_{ext}(r) = \rho_{2h}(r) + \rho_m(z)$ . Abaixo de cada um, apresenta-se um comparativo (diferença relativa) com os resultados obtidos com o pacote Colossus. Os resultados foram obtidos para um halo em *redshift*  $z = 0.1$  com  $M_{200m} = 10^{15} M_{\odot} h^{-1}$  e  $c_{200m} = 4$ , e considerando  $\Omega_{\Lambda,0} = 0,691$ ,  $\Omega_{m,0} = 0,3089$  e  $\Omega_{k,0} = 0$ .

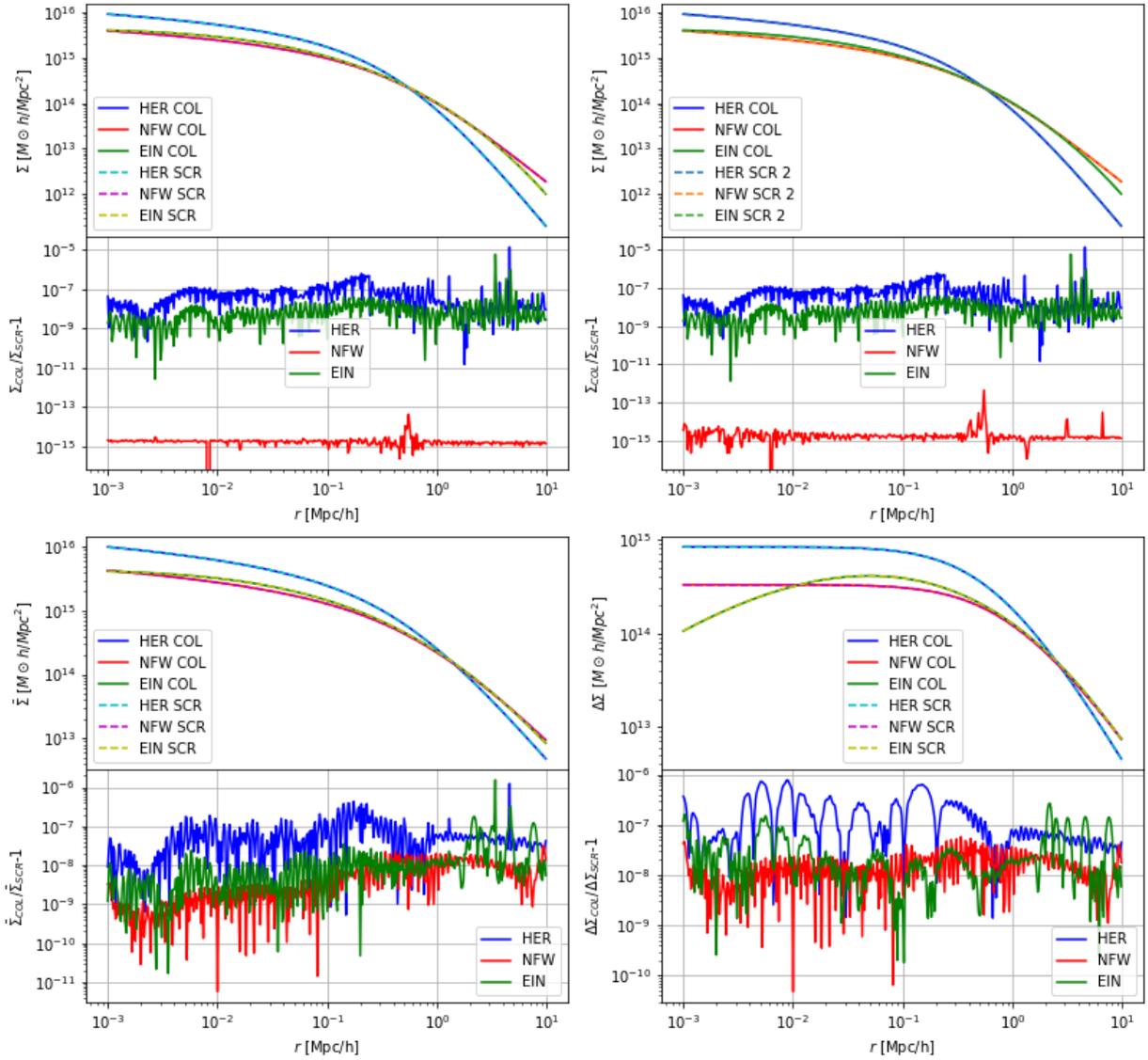


Figura 20 – Densidades superficiais de massa (implementação das funções analíticas no gráfico de cima à esquerda e da integração numérica no gráfico de cima à direita), densidades superficiais de massa média (gráfico de baixo à esquerda) e excessos de densidade superficial de massa (gráfico de baixo à direita), para diferentes modelos de perfis internos (HER, NFW e EIN). Abaixo de cada um, apresenta-se um comparativo (diferença relativa) com os resultados obtidos com o pacote Colossus. Os resultados foram obtidos para um halo em *redshift*  $z = 0.1$  com  $M_{200m} = 10^{15} M_{\odot} h^{-1}$  e  $c_{200m} = 4$ , e considerando  $\Omega_{\Lambda,0} = 0,691$ ,  $\Omega_{m,0} = 0,3089$  e  $\Omega_{k,0} = 0$ .



# Conclusão

Os temas abordados neste trabalho - perfis de densidade de matéria de halos de matéria escura e lenteamento gravitacional fraco de aglomerados de galáxias - têm sido muito discutido na literatura, em particular nas últimas duas décadas. Isso se deve ao fato do número de dados que estão sendo medidos e observados por diferentes levantamentos. Esse número aumentará enormemente com levantamentos como o *Legacy Survey of Space and Time* (LSST) e o satélite Euclid que devem começar a operar nos próximos dois anos. As medidas de efeitos de lenteamento gravitacional fraco e forte nos possibilitam estudar a distribuição de massa de aglomerados de galáxias e estimar as massas desses objetos. Esses dados também permitem entender melhor diferentes aspectos da evolução do universo.

Além da revisão bibliográfica dos tópicos contidos nesta monografia, este trabalho também proporcionou uma experiência prática no uso e desenvolvimento de ferramentas numéricas. O código produto deste trabalho foi comparado e validado em relação ao pacote Colossus e à biblioteca NumCosmo.



# Referências

- ADHIKARI, S. *The splashback radius - understanding the boundaries of dark matter halos*. 2018. Disponível em: <<https://kipac.stanford.edu/highlights/splashback-radius-understanding-boundaries-dark-matter-halos>>. Citado na página 47.
- ADHIKARI, S.; DALAL, N.; CHAMBERLAIN, R. T. Splashback in accreting dark matter halos. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2014, n. 11, p. 019–019, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 16, 50 e 51.
- ANDERNACH, H.; ZWICKY, F. *English and Spanish Translation of Zwicky's (1933) The Redshift of Extragalactic Nebulae*. 2017. Citado na página 21.
- BARTELMANN, M.; SCHNEIDER, P. Weak gravitational lensing. *Physics Reports*, v. 340, n. 4-5, p. 291–472, 2001. Citado na página 32.
- BAXTER, E. et al. The Halo Boundary of Galaxy Clusters in the SDSS. *The Astrophysical Journal*, v. 841, n. 1, p. 18, 2017. Citado na página 61.
- BRYAN, G. L.; NORMAN, M. L. Statistical Properties of X-Ray Clusters: Analytic and Numerical Comparisons. *The Astrophysical Journal*, v. 495, n. 1, p. 80–99, 1998. Citado na página 44.
- CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. [S.l.]: Addison Wesley, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 64.
- CHANG, C. et al. The Splashback Feature around DES Galaxy Clusters: Galaxy Density and Weak Lensing Profiles. *The Astrophysical Journal*, v. 864, n. 1, p. 83, 2018. Citado na página 61.
- CHISARI, N. E. et al. Core Cosmology Library: Precision Cosmological Predictions for LSST. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 242, n. 1, p. 2, 2019. Citado na página 88.
- COLE, S.; LACEY, C. The structure of dark matter haloes in hierarchical clustering models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 281, n. 2, p. 716–736, 1996. Citado na página 76.
- COLLINS, G. W. *The Virial Theorem In Stellar Astrophysics*. 2003. Disponível em: <<http://bifrost.cwru.edu/personal/collins/virial/>>. Citado na página 105.
- COMBET, C. et al. *Cosmology with galaxy clusters*. 2019. Disponível em: <<https://indico.in2p3.fr/event/20036/contributions/76705/>>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 78.
- CONGDON, A. B.; KEETON, C. R. *Principles of Gravitational Lensing: Light Deflection as a Probe of Astrophysics and Cosmology*. [S.l.]: Springer Praxis Books, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 84.

- COORAY, A.; SHETH, R. Halo models of large scale structure. *Physics Reports*, v. 372, n. 1, p. 1–129, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 39.
- DIEMER, B. COLOSSUS: A Python Toolkit for Cosmology, Large-scale Structure, and Dark Matter Halos. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 239, n. 2, p. 35, 2018. Citado 7 vezes nas páginas 11, 13, 45, 61, 62, 87 e 109.
- DIEMER, B.; KRAVTSOV, A. V. Dependence of the outer density profiles of halos on their mass accretion rate. *The Astrophysical Journal*, v. 789, n. 1, p. 1, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 51, 53, 58 e 61.
- DIEMER, B.; MORE, S.; KRAVTSOV, A. V. The pseudo-evolution of halo mass. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 766, n. 1, p. 25, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 109.
- DODELSON, S. *Modern Cosmology*. [S.l.]: Academic Press, 2003. Citado na página 25.
- DUBINSKI, J.; CARLBERG, R. G. The Structure of Cold Dark Matter Halos. *The Astrophysical Journal*, v. 378, p. 496, 1991. Citado na página 54.
- EINASTO, J. On the Construction of a Composite Model for the Galaxy and on the Determination of the System of Galactic Parameters. *Trudy Astrofizicheskogo Instituta Alma-Ata*, v. 5, p. 87–100, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 56.
- ESO. *Galaxy cluster CL2244-02 with gravitational arcs*. 1998. Disponível em: <<https://www.hq.eso.org/public/images/eso9856d/>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 22.
- FALCO, E. E.; GORENSTEIN, M. V.; SHAPIRO, I. I. On model-dependent bounds on H 0 from gravitational images : application to Q 0957+561 A, B. *The Astrophysical Journal*, v. 289, p. L1–L4, 1985. Citado na página 79.
- FORD, J. L. *Galaxy Cluster Studies with Weak Lensing Magnification & Shear*. Tese (Doutorado) — The University of British Columbia, 2015. Disponível em: <<https://open.library.ubc.ca/cIRcle/collections/ubctheses/24/items/1.0166535>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 71.
- FORT, B. et al. Faint distorted structures in the core of A 370 : are they gravitationally lensed galaxies at z=1? *Astronomy & Astrophysics*, v. 200, p. L17–L20, 1988. Citado na página 22.
- FURLANETTO, C. *Arcos gravitacionais em aglomerados de galáxias: detecção, caracterização e modelamento*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), 2012. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/handle/10183/72088>>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 56 e 63.
- GAO, L. et al. The redshift dependence of the structure of massive cold dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 387, n. 2, p. 536–544, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 16, 45 e 58.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*. [S.l.]: Addison Wesley, 2001. Citado na página 105.

- HARRIS, C. R. et al. Array programming with NumPy. *Nature*, v. 585, p. 357–362, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 15, 40 e 87.
- HASSANI, S. *Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations*. [S.l.]: Springer, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 72.
- HAYASHI, E.; WHITE, S. D. M. Understanding the halo-mass and galaxy-mass cross-correlation functions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 388, n. 1, p. 2–14, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 16, 56 e 60.
- HERNQUIST, L. An Analytical Model for Spherical Galaxies and Bulges. *The Astrophysical Journal*, v. 356, p. 359, 1990. Citado na página 53.
- HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 32.
- HOEKSTRA, H.; JAIN, B. Weak Gravitational Lensing and Its Cosmological Applications. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, v. 58, n. 1, p. 99–123, 2008. Citado na página 23.
- HOGG, D. W. *Distance measures in cosmology*. 1999. Citado na página 32.
- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Academy of Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. Citado na página 29.
- HUBBLE/ESA. *New Hubble image of galaxy cluster Abell 1689*. 2013. Disponível em: <<https://esahubble.org/news/heic1317/>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 23.
- HUNTER, J. D. Matplotlib: A 2D Graphics Environment. *Computing in Science Engineering*, v. 9, n. 3, p. 90–95, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 15, 40 e 87.
- IAU. *IAU members vote to recommend renaming the Hubble law as the Hubble–Lemaître law*. 2018. Disponível em: <<https://www.iau.org/news/pressreleases/detail/iau1812/>>. Citado na página 29.
- JOHANSSON, F. et al. *mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic (version 0.18)*. [S.l.], 2013. Disponível em: <<http://mpmath.org/>>. Citado na página 87.
- KAISER, N. Nonlinear Cluster Lens Reconstruction. *The Astrophysical Journal*, v. 439, p. L1–L3, 1995. Citado na página 81.
- KAISER, N.; SQUIRES, G. Mapping the Dark Matter with Weak Gravitational Lensing. *The Astrophysical Journal*, v. 404, p. 441, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 77.
- KIM, J. et al. Precise Mass Determination of SPT-CL J2106-5844, the Most Massive Cluster at  $z > 1$ . *The Astrophysical Journal*, v. 887, n. 1, p. 76, 2019. Citado na página 48.
- KNEIB, J.-P.; NATARAJAN, P. Cluster lenses. *The Astronomy and Astrophysics Review*, v. 19, n. 1, 2011. Citado na página 75.

- KRAVTSOV, A. V.; BORGANI, S. Formation of Galaxy Clusters. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, v. 50, n. 1, p. 353–409, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 45.
- LYNDS, R.; PETROSIAN, V. Luminous Arcs in Clusters of Galaxies. *The Astrophysical Journal*, v. 336, p. 1, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 15, 21 e 22.
- MARTINS, J. S. *O Modelo de Halos e o Espectro de Potência da Matéria Escura Morna*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Física Teórica - Universidade Estadual Paulista (IFT-Unesp), 2015. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/154698>>. Citado na página 37.
- MEHREM, R. *The Plane Wave Expansion, Infinite Integrals and Identities involving Spherical Bessel Functions*. 2011. Citado na página 39.
- MELLIER, Y. Probing the Universe with Weak Lensing. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, v. 37, n. 1, p. 127–189, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 17, 76 e 77.
- MERRITT, D. et al. Empirical Models for Dark Matter Halos. I. Nonparametric Construction of Density Profiles and Comparison with Parametric Models. *The Astronomical Journal*, v. 132, n. 6, p. 2685–2700, 2006. Citado na página 56.
- MO, H.; van den BOSCH, F.; WHITE, S. *Galaxy Formation and Evolution*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado na página 45.
- MORE, S.; DIEMER, B.; KRAVTSOV, A. V. The splashback radius as a physical halo boundary and the growth of halo mass. *The Astrophysical Journal*, v. 810, n. 1, p. 36, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 49.
- MÜLLER, T.; GRAVE, F. *Catalogue of Spacetimes*. 2014. Disponível em: <<https://www.visus.uni-stuttgart.de/publikationen/catalogue-of-spacetimes>>. Citado na página 28.
- NARAYAN, R.; BARTELMANN, M. *Lectures on Gravitational Lensing*. 1996. Citado 6 vezes nas páginas 17, 63, 73, 75, 78 e 79.
- NAVARRO, J. F.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M. A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering. *The Astrophysical Journal*, v. 490, n. 2, p. 493–508, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 46, 53, 55 e 56.
- NORMAN, M. L. *Hot Gas in Galaxy Clusters: Theory and Simulations*. 2005. Citado 4 vezes nas páginas 15, 25, 37 e 43.
- OLIVEIRA, N. C. *Um estudo de aglomerados de galáxias via lentes gravitacionais: perfil de massa e cosmologia*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo (USP), 2017. Disponível em: <<https://www.iag.usp.br/pos/astronomia/portugues/dissertacoestestes/um-estudo-de-aglomerados-de-galaxias-lentes-gravitacionais-p>>. Citado na página 63.
- PADMANABHAN, T. *Structure Formation in the Universe*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1993. Citado na página 41.

- PENNA-LIMA, M. *Abundância de Aglomerados de Galáxias como Observável Cosmológico: Aplicações aos Levantamentos Fotométricos DES e SDSS*. Tese (Doutorado) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), 2010. Disponível em: <[http://cbpfindex.cbpf.br/publication\\_pdfs/tese\\_doutorado.2011\\_04\\_20\\_14\\_25\\_21.pdf](http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/tese_doutorado.2011_04_20_14_25_21.pdf)>. Citado na página 39.
- PERCIVAL, W. J. Cosmological structure formation in a homogeneous dark energy background. *Astronomy Astrophysics*, v. 443, n. 3, p. 819–830, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.
- PRADA, F. et al. How Far Do They Go? The Outer Structure of Galactic Dark Matter Halos. *The Astrophysical Journal*, v. 645, n. 2, p. 1001–1011, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 60.
- RETANA-MONTENEGRO, E. et al. Analytical properties of einasto dark matter haloes. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 540, p. A70, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 56, 57 e 86.
- RINDLER, W. *Relativity: Special, General, and Cosmological*. [S.l.]: Oxford University Press, 2006. Citado na página 25.
- RUBIN, V. One Hundred Years of Rotating Galaxies. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, v. 112, n. 772, p. 747–750, 2000. Citado na página 21.
- SCHNEIDER, P. *Extragalactic Astronomy and Cosmology*. [S.l.]: Springer, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 47.
- SCHNEIDER, P.; KOCHANNEK, C.; WAMBSGANSS, J. *Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro*. [S.l.]: Springer, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 79.
- SCHNEIDER, P.; SEITZ, C. Steps towards nonlinear cluster inversion through gravitational distortions. I. Basic considerations and circular clusters. *Astronomy and Astrophysics*, v. 294, p. 411–431, 1995. Citado na página 79.
- SHIN, E. M.; EVANS, N. W. The Milky Way Galaxy as a strong gravitational lens. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 374, n. 4, p. 1427–1436, 2007. Citado na página 85.
- SMITH, S. The Mass of the Virgo Cluster. *The Astrophysical Journal*, v. 83, p. 23, 1936. Citado na página 21.
- SOUCAIL, G. et al. A blue ring-like structure in the center of the A 370 cluster of galaxies. *Astronomy & Astrophysics*, v. 172, p. L14–L16, 1987. Citado na página 21.
- SUTO, D. et al. Confrontation of top-hat spherical collapse against dark halos from cosmological N-body simulations. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, v. 68, n. 1, p. 14, 2016. Citado na página 41.
- TANTAU, T. *The TikZ and PGF Packages: Manual for version 3.1.8b*. [S.l.], 2020. Disponível em: <<https://www.ctan.org/pkg/pgf>>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 105.
- TEGMARK, M. et al. The Three-Dimensional Power Spectrum of Galaxies from the Sloan Digital Sky Survey. *The Astrophysical Journal*, v. 606, n. 2, p. 702–740, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 38.

- TERGOLINA, M. *Modelling a group-scale lens at  $z \sim 0.6$* . Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), 2020. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.ufrgs.br/da.php?nrb=001115812&loc=2020&l=b7575b57d73649d6>>. Citado na página 22.
- The SciPy community. *scipy.special.gammainc*. 2021. Disponível em: <<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.special.gammainc.html>>. Citado na página 57.
- TINKER, J. L. et al. The large-scale bias of dark matter halos: Numerical calibration and model tests. *The Astrophysical Journal*, v. 724, n. 2, p. 878–886, 2010. Citado na página 61.
- TYSON, J. A.; VALDES, F.; WENK, R. A. Detection of Systematic Gravitational Lens Galaxy Image Alignments: Mapping Dark Matter in Galaxy Clusters. *The Astrophysical Journal*, v. 349, p. L1, 1990. Citado 3 vezes nas páginas 15, 22 e 23.
- UMETSU, K. Cluster-galaxy weak lensing. *The Astronomy and Astrophysics Review*, v. 28, n. 1, p. 7, 2020. Citado 7 vezes nas páginas 16, 63, 64, 70, 78, 79 e 81.
- UMETSU, K.; DIEMER, B. Lensing Constraints on the Mass Profile Shape and the Splashback Radius of Galaxy Clusters. *The Astrophysical Journal*, v. 836, n. 2, p. 231, 2017. Citado na página 62.
- VIRTANEN, P. et al. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, v. 17, p. 261–272, 2020. Citado na página 87.
- VITENTI, S. D. P. *Estudo das Perturbações em Universos com Ricochete*. Tese (Doutorado) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), 2011. Disponível em: <[http://cbpfindex.cbpf.br/publication\\_pdfs/thesis\\_vitenti.2012\\_03\\_07\\_16\\_43\\_50.pdf](http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/thesis_vitenti.2012_03_07_16_43_50.pdf)>. Citado na página 25.
- VITENTI, S. D. P.; PENNA-LIMA, M. *NumCosmo: Numerical Cosmology*. 2014. Astrophysics Source Code Library, ascl:1408.013. Citado na página 88.
- WALD, R. M. *General Relativity*. [S.l.]: The University of Chicago Press, 1984. Citado na página 25.
- WEISSTEIN, E. W. "Wiener-Khinchin Theorem". *From MathWorld - A Wolfram Web Resource*. 2021. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/Wiener-KhinchinTheorem.html>>. Citado na página 39.
- Wikipedia contributors. *Virial theorem - Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2021. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Virial\\_theorem&oldid=1010311810](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Virial_theorem&oldid=1010311810)>. Citado na página 105.
- WRIGHT, C. O.; BRAINERD, T. G. Gravitational Lensing by NFW Halos. *The Astrophysical Journal*, v. 534, n. 1, p. 34–40, 2000. Citado na página 85.
- ZENTNER, A. R. The excursion set theory of halo mass functions, halo clustering, and halo growth. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 16, n. 05, p. 763–815, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 39.

---

ZU, Y. et al. Cosmological constraints from the large-scale weak lensing of SDSS MaxBCG clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 439, n. 2, p. 1628–1647, 2014. Citado na página [60](#).



# Apêndices



# APÊNDICE A – Teorema do Virial

Neste apêndice, o Teorema do Virial será obtido de primeiros princípios. Apesar de na literatura existirem diferentes formas de demonstrá-lo, com diferentes graus de complexidade, aqui serão seguidos principalmente os passos de (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2001) (sec. 3.4), (COLLINS, 2003) (sec. 1.2) e (Wikipedia contributors, 2021).

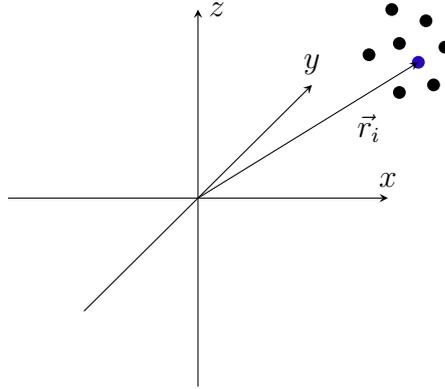


Figura 21 – Representação de um sistema de  $N$ -corpos. Imagem gerada com auxílio de ferramentas disponíveis no pacote TikZ (TANTAU, 2020).

Considerado um sistema de  $N$  partículas pontuais, conforme Figura 21, cada uma como uma massa  $m_i$ , em uma posição  $\vec{r}_i$  e com um certo momento linear  $\vec{p}_i$ , é conveniente definir a quantidade escalar

$$G \equiv \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i, \quad (\text{A.1})$$

que nada mais é do que

$$G = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{dI}{dt}, \quad (\text{A.2})$$

em que

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \quad (\text{A.3})$$

é o momento de inércia do sistema em relação à origem.

A derivada total em relação ao tempo de  $G$  é

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}, \quad (\text{A.4})$$

em que o primeiro termo do lado direito pode ser escrito

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i, \quad (\text{A.5})$$



Substituindo a eq. (A.13) na eq. (A.11), chega-se a

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N \vec{f}_{ji} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j). \quad (\text{A.14})$$

Assumindo, agora, que a força de interação entre cada par de partículas pode ser derivada de um potencial que depende da separação entre elas, tem-se

$$\vec{f}_{ji} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (\text{A.15})$$

tal que

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N \vec{f}_{ji} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N \frac{\partial V}{\partial r} \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N \frac{\partial V}{\partial r} |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \quad (\text{A.16})$$

e a eq. (A.8) pode ser escrita

$$\frac{dG}{dt} = -\sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N \frac{\partial V}{\partial r} r_{ji} + 2T, \quad (\text{A.17})$$

com  $r_{ji} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ .

Se o potencial é dado por uma lei de potências, tal

$$V(r_{ji}) = ar_{ji}^n, \quad (\text{A.18})$$

o primeiro termo do lado direito da eq. (A.17) pode ser reescrito

$$-\sum_i \sum_{j<i} \frac{\partial V}{\partial r} r_{ji} = -\sum_i \sum_{j<i} (anr_{ji}^{n-1})r_{ji} = -n \sum_i \sum_{j<i} ar_{ji}^n = -n \sum_i \sum_{j<i} V(r_{ji}) = -nU, \quad (\text{A.19})$$

em que

$$U = \sum_i \sum_{j<i} V(r_{ji}) \quad (\text{A.20})$$

é a energia potencial total do sistema. Assim, a derivada total em relação ao tempo da quantidade  $G$  assume, finalmente, a forma

$$\frac{dG}{dt} = 2T - nU \quad (\text{A.21})$$

Realizando a média temporal da eq. (A.21) em um certo intervalo de tempo  $\tau$ , tem-se

$$\overline{\frac{dG}{dt}} \equiv \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt = \frac{1}{\tau} \int_{G(0)}^{G(\tau)} dG = \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)] = 2\overline{T} - n\overline{U}. \quad (\text{A.22})$$

Se o movimento do sistema é periódico com período igual a  $\tau$ , i.e. as posições e os momentos de todas as partículas se repetem decorrido o tempo  $\tau$ , então  $G(\tau) = G(0)$  e

$$2\overline{T} - n\overline{U} = 0. \quad (\text{A.23})$$

Mesmo que o movimento do sistema não seja periódico, se ele for limitado, i.e. as posições e os momentos de todas as partículas se mantem finitas tal que a quantidade  $G$  é limitada entre dois extremos  $G_{max}$  e  $G_{min}$ , então pode-se escolher um intervalo  $\tau$  grande o suficiente de modo que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left| \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau} \right| \leq \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{G_{max} - G_{min}}{\tau} = 0 \quad (\text{A.24})$$

e a eq. (A.23) também seja válida.

Se o potencial de interação entre cada par de partículas é o potencial gravitacional Newtoniano, tal que  $n = -1$  na eq. (A.18), tem-se finalmente a forma mais convencional do Teorema do Virial, válida para um sistema clássico governado pela gravidade,

$$2\bar{T} + \bar{U} = 0. \quad (\text{A.25})$$

# APÊNDICE B – Pseudoevolução de Massa de um Halo Estático

Neste apêndice, a pseudoevolução de massa de um halo estático (i.e. um halo que não está acretando matéria) será apresentada seguindo o que está colocado em (DIEMER; MORE; KRAVTSOV, 2013) (sec. 2.1).

Assumindo que a distribuição de matéria de um halo é descrita pelo perfil NFW

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s}\right) \left(1 + \left(\frac{r}{r_s}\right)\right)^2},$$

conforme eq. (4.9), a massa de uma certa sobredensidade esférica definida no halo pode ser obtida pela expressão

$$M_\Delta(z) = 4\pi\rho_s r_s^3 \mu[c_\Delta(z)], \quad (\text{B.1})$$

em que  $c_\Delta(z) = r_\Delta(z)/r_s$  é o parâmetro de concentração e

$$\mu[x] = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}, \quad (\text{B.2})$$

conforme eq. (4.13).

Se o perfil do halo não evolui fisicamente, ou seja, se o halo não está acretando matéria, a massa de uma sobredensidade esférica definida nele irá variar somente devido a evolução da densidade de referência com o *redshift* (ver seção 3.2), que é o que se denominada pseudoevolução de massa. Essa variação da massa  $M_\Delta(z)$  entre dois *redshifts*  $z_i$  e  $z_f$  pode então ser quantificada pela relação

$$M_\Delta(z_f) = M_\Delta(z_i) \frac{\mu[c_\Delta(z_f)]}{\mu[c_\Delta(z_i)]}, \quad (\text{B.3})$$

já que se fisicamente o perfil de densidade do halo não se altera, então  $r_s$  e  $\rho_s$  não variam com o tempo (ou com o *redshift*) na eq. (B.1).

Quando assume-se também uma relação concentração-massa (ver (DIEMER, 2018) (sec. 4.3)), a pseudoevolução de massa de uma sobredensidade esférica definida no halo pode ser totalmente descrita com apenas um valor da massa  $M_\Delta(z)$ .